

UNIVERSIDADE DE TAUBATÉ

Daniel Carlos Reis

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM
PÊNULO DUPLO INVERTIDO**

Taubaté – SP

2017

Daniel Carlos Reis

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM
PÊNULO DUPLO INVERTIDO**

Dissertação apresentada para obtenção do Título de Mestre pelo Curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté.

Área de concentração: Automação.

ORIENTADOR: Prof. Dr. João Bosco Gonçalves.

Taubaté – SP

2017

Reis, Daniel C.

Modelagem, Simulação e Controle de um Pêndulo Duplo Invertido / Daniel Carlos Reis – 2017.
41f. :il.

Dissertação (Mestrado) – Universidade de Taubaté, Departamento de Engenharia Mecânica, 2017.

Orientação: Prof. Dr. João Bosco Gonçalves, Departamento de Engenharia Mecânica.

1. Pêndulo duplo invertido. 2. Automação. 3. Modelagem. 4. Simulação. 5. Controle.
I. Título

DANIEL CARLOS REIS

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM PÊNDULO DUPLO
INVERTIDO**

Dissertação apresentada para obtenção do Título de Mestre pelo Curso de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Mecânica da Universidade de Taubaté.
Área de Concentração: Automação

Data: ____ / ____ / ____

Resultado: _____

BANCA EXAMINADORA

Prof. Dr. João Bosco Gonçalves

Universidade de Taubaté

Assinatura _____

Prof. Dr. Álvaro Manoel de Souza Soares

Universidade de Taubaté

Assinatura _____

Prof. Dr. Giuliani Paulineli Garbi

Instituto Nacional de Pesquisas Espaciais

Assinatura _____

Dedico este trabalho a minha família, minha esposa Bruna Bonelli Valério Reis, pelo incentivo e apoio incondicional durante a realização desse curso de Mestrado e em especial ao meu filho Diego Bonelli Valério Reis pelo exemplo de vida que me proporciona todos os dias devido a sua paralisia cerebral.

AGRADECIMENTOS

Ao professor João Bosco Gonçalves, pelas horas de estudo, pela paciência, competência e comprometimento nas orientações passadas a mim com um único propósito; produzir um ótimo trabalho.

A minha mãe Angélica Fortes dos Reis que sempre me motivou, mesmo nos momentos de desânimo e desmotivação.

Ao amigo Renato Coelho Guanieri Leite pelo apoio nas aulas, nos momentos de estudo e pelos cafés preparados carinhosamente por sua mãe, dona Aurora.

Ao amigo Alexandre Antonio Rosa por sua contribuição intelectual.

Ao professor Evandro Luís Nohara por permitir que fosse estendido o prazo desse eminente curso, devido a problemas particulares.

Aos professores Giuliani P. Garbi e Álvaro M. de S. Soares pelas sugestões dadas em relação a elaboração, estruturação e escrita dessa dissertação.

A Universidade de Taubaté pelo empenho dos professores e funcionários no intuito de engrandecer cada vez a instituição e pelo fornecimento de suportes (laboratórios, livros, etc.) para a elaboração desse trabalho.

A todos que contribuíram de forma direta ou indireta na escrita dessa dissertação.

Por fim, a Deus que me deu saúde, força e perseverança para ir até o fim.

“Superar o fácil não tem mérito, é obrigação; vencer o difícil é glorificante; ultrapassar o outrora impossível é esplendoroso”.

Alexandre Fonteles

RESUMO

Esse trabalho tem o propósito de modelar matematicamente, simular e controlar um pêndulo duplo invertido. Para a modelagem foi empregado o Método de Lagrange, que permite a obtenção das equações diferenciais ordinárias de 2ª ordem não lineares características do sistema, estas descrevem o movimento do pêndulo duplo invertido considerando a variação angular, temporal e a posição do pêndulo duplo invertido em relação aos eixos coordenados (abscissas e ordenadas). O sistema de controle em malha fechada, foi implementado por meio do *software* MATLAB® e da ferramenta SIMULINK®, que permite analisar o movimento do pêndulo duplo invertido e a ação de controle proposta. Levando em consideração os resultados gráficos e numéricos obtidos, foi possível a construção de um sistema de controle MIMO utilizando a Teoria de Controle Moderno, esse sistema deverá agir no intuito de manter pêndulo duplo invertido alinhado, e na posição vertical para cima. Os resultados indicam a possibilidade de manter na vertical o pendulo duplo invertido, aplicando uma ação de controle associada à primeira articulação.

Palavras-chaves: 1. Pêndulo duplo invertido. 2. Automação. 3. Modelagem. 4. Simulação. 5. Controle.

ABSTRACT

This work has the purpose of mathematically modeling, simulating and controlling an inverted double pendulum. For the modeling, the Lagrangian Method was used to obtain the nonlinear second order ordinary differential equations of the system, which describe the movement of the inverted double pendulum considering the angular, temporal variation and the position of the inverted double pendulum in relation Coordinate (abscissas and ordinate) axes. The closed-loop control system was implemented through MATLAB® software and the SIMULINK® tool, which allows the analysis of the movement of the inverted double pendulum and the proposed control action. Taking into consideration the graphical and numerical results obtained, it was possible to construct a MIMO control system using the Modern Control Theory, this system should act in order to maintain inverted double pendulum aligned, and vertical upwards. The results indicate the possibility of maintaining the inverted double pendulum vertically, applying a control action associated to the first joint.

Keywords: 1. Double inverted pendulum. 2. Automation. 3. Modeling. 4. Simulation. 5. Control.

SUMÁRIO

Capítulo 1 – Introdução.....	14
1.1 – Pêndulo simples.....	14
1.2 – Pêndulo invertido e suas aplicações.....	15
1.3 – Formulação do problema.....	16
1.4 – Método de Lagrange.....	17
1.5 – Metodologia científica e de implementação.....	17
1.6 – Motivação desse trabalho.....	18
1.7 – Objetivos gerais e específicos.....	18
Capítulo 2 – Revisão bibliográfica.....	19
Capítulo 3 – Modelagem matemática do pêndulo duplo invertido.....	23
3.1 – Determinação das energias cinética e potencial para o pêndulo duplo invertido.....	24
3.2 – Determinação do modelo para o pêndulo duplo invertido.....	27
Capítulo 4 – Simulação do pêndulo invertido duplo.....	28
4.1 – Simulação das equações de movimento.....	28
Capítulo 5 – Discussão sobre os resultados modelados e simulados.....	30
Capítulo 6 – Elaboração do sistema de controle do pêndulo duplo invertido.....	33
6.1 – Modelagem no espaço de estados.....	33
6.2 – Discussão dos resultados obtidos na implementação e simulação do modelo para o pêndulo duplo invertido no espaço de estados.....	37
Capítulo 7 – Conclusão.....	39
Referências Bibliográficas.....	40

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Relógio Cuco.....	14
Figura 1.2 – Pêndulo de Foucault.....	15
Figura 1.3 – Veículo de transporte Segway.....	15
Figura 1.4 – Veículo lançador de foguetes.....	16
Figura 3.1 – Processo de modelagem matemática.....	23
Figura 3.2 – Representação física do pêndulo duplo invertido.....	24
Figura 4.1 – Diagrama de blocos.....	29
Figura 5.1 – Gráfico da variação angular do pêndulo duplo em função do tempo.....	30
Figura 5.2 – Gráfico da posição cartesiana do pêndulo duplo.....	30
Figura 6.1 – Diagrama de blocos que representa o projeto do controlador do pêndulo duplo invertido.....	37
Figura 6.2 – Gráfico das variáveis de estado do pêndulo em função do tempo.....	38

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Parâmetros do pêndulo duplo invertido.....	25
Tabela 4.1 – Valores atribuídos aos parâmetros do pêndulo duplo invertido.....	28

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

UNITAU.....	Universidade de Taubaté
MATLAB.....	Matriz de Laboratório
www.....	<i>world wide web</i>
EDO.....	Equação Diferencial Ordinária
http.....	protocolo de transferência de hipertexto
MIMO.....	Múltiplas Entradas e Múltiplas Saídas

CAPÍTULO 1 – INTRODUÇÃO

Esse capítulo faz introdução do contexto histórico do pêndulo simples, das aplicações do pêndulo invertido na engenharia, da metodologia utilizada, da motivação e dos objetivos desse trabalho.

1.1 – Pêndulo simples

O pêndulo simples tem como característica, uma haste que sempre estará na vertical, apontando para baixo devido a Força Peso.

Durante anos, matemáticos e físicos vêm estudando as aplicações do pêndulo simples em diversas áreas da mecânica clássica e no dia-a-dia (BOYER, 1974). Galileu Galilei, em meados do ano de 1600, propôs o uso de pêndulos simples em relógios, o pêndulo simples movimentava as engrenagens do relógio, fazendo com que ele funcionasse, famoso Relógio Cuco (Fig. 1.1).



Figura 1.1 – Relógio Cuco
Fonte: <http://www.eusoucurioso.com>

O francês Jean Foucault em 1851 construiu um pêndulo simples que era composto por um fio de 67 metros de comprimento e por uma esfera de 30 kg, denominado Pêndulo de Foucault (Fig. 1.2). A partir desse experimento Foucault conseguiu constatar a existência do movimento de rotação da Terra.

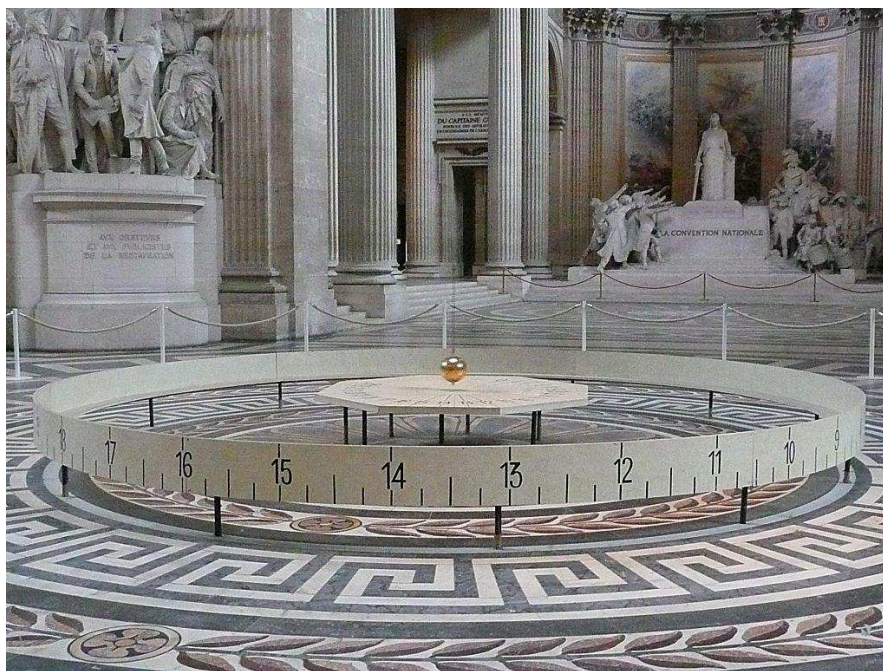


Figura 1.2 – Pêndulo de Foucault
Fonte: <http://obaricentrodamente.blogspot.com.br>

1.2 – Pêndulo invertido e suas aplicações

O pêndulo invertido segue o mesmo padrão do pêndulo simples, mas na posição vertical voltado para cima e sua utilização é muito comum nas áreas de robótica, automação, etc (OGATA, 2010).

O conceito físico do pêndulo invertido é aplicado diretamente em veículos automotores, tais como o veículo de transporte individual chamado Segway (Fig. 1.3), veículos lançadores de foguetes (Fig. 1.4), celulares, em braços robóticos, entre outras.



Figura 1.3 – Veículo de transporte Segway
Fonte: www.segway.com



Figura 1.4 – Veículo lançador de foguetes
Fonte: <https://spaceflightnow.com/pslv/c25/prelaunch/>

1.3 – Formulação do problema

O principal problema proposto nesse trabalho será “colocar o pêndulo duplo invertido na posição vertical, voltado para cima e mantê-lo nessa posição aplicando um torque apenas na haste 1 (primeira articulação)”.

Após todo processo de modelagem matemática (não linear e linear), simulação e implementação do projeto de controle desse pêndulo, será necessário a análise de todos os resultados obtidos nas modelagens e simulações feitas, desde as equações não lineares até as lineares. Assim feitas essas verificações, pode-se resolver o problema proposto por esse trabalho.

1.4 – Método de Lagrange

Esse método fundamenta-se na análise da energia cinética e potencial do sistema em um campo de forças, onde a energia cinética é uma grandeza escalar associada a um corpo em movimento e a energia potencial gravitacional está associada à posição de um corpo no campo gravitacional da Terra (CARRON; GUIMARÃES, 1997). Admitindo esse campo de forças inicialmente conservativo, em função dos seus graus de liberdade, no caso do pêndulo duplo invertido, 2 graus de liberdade. Essa é uma das vantagens da utilização do Lagrangiano na definição do modelo dinâmico de sistemas de elevados graus de liberdade, já que por meio dessa abordagem, pode-se então eliminar a ação das forças de vínculo inerentes ao sistema físico e então simplificar a análise matemática do problema (TIPLER, 2006).

Para a aplicação do Lagrangiano em um sistema real, deve-se considerar além das forças externas aplicadas, também a ação das forças de dissipação de energia (sistemas físicos reais dissipam energia). Sendo assim, nesse caso, surge uma parcela dita não conservativa, referente às forças dissipativas, nas expressões analíticas e dinâmicas do sistema (TIPLER, 2006).

Para um sistema conservativo é possível escrever uma função da posição e da velocidade de uma partícula, denominada energia mecânica, em que se conserva durante todo o movimento (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 1996).

1.5 – Metodologia científica e de implementação

A partir das equações de movimento obtidas na aplicação do Lagrangiano, pode-se implementá-las utilizando o *software* MATLAB/SIMULINK®, assim obtendo resultados gráficos e numéricos que serão relevantes na construção do sistema de controle.

A elaboração do sistema de controle MIMO do pêndulo invertido duplo utilizará a Teoria de Controle Moderno com realimentação (malha fechada) e sua implementação dar-se-á a partir do *software* MATLAB®, levando em consideração a análise e do ajuste dos parâmetros de um *compensador*, poderá manter-se o pêndulo alinhado na vertical e voltado para cima (OGATA, 2010).

1.6 – Motivação desse trabalho

Muitos acontecimentos naturais tais como, o simples fato de abrir uma porta, locomover-se, realizar algo de forma autônoma (robôs, braços robóticos, etc.),

acabam sendo desafios interessantes e motivadores para os engenheiros, matemáticos, físicos e estudiosos que procuram uma maneira prática de realizar essas atividades corriqueiras, e elaboram sistemas “complexos” que realizam essas atividades sem o auxílio de um ser humano (sistemas autônomos). Desse modo, para a elaboração desses sistemas é necessário o conhecimento em modelagem matemática e manipulação de *softwares* especializados em implementação e visualização gráfica. Assim, nosso objeto de estudo, o pêndulo duplo invertido, é comumente utilizado em braços robóticos, mas para ser elaborado requer de muito esforço e dedicação. Todos os passos para a modelagem matemática, simulação e controle serão descritos de maneira didática e de fácil entendimento a todos os simpatizantes por esse assunto, que cada vez mais é difundido pelo mundo acadêmico.

1.7 – Objetivos gerais e específicos

O objetivo geral deste trabalho será a elaboração de um sistema de controle que seja capaz de manter o pêndulo duplo invertido alinhado na vertical e voltado para cima, utilizando-se da Teoria de Controle Moderno.

Os objetivos específicos são:

- Elaborar um modelo matemático, utilizando-se do Método de Lagrange, modelo esse que fornecerá as equações de movimento do pêndulo.
- Implementar e simular as equações de movimento do pêndulo com o auxílio do *software* MATLAB/SIMULINK®.
- Interpretar os resultados numéricos e gráficos obtidos, pois a partir dessa análise, poderá ser projetado o sistema de controle capaz de atender aos problemas encontrados.
- Construir um sistema de controle, utilizando o *software* MATLAB®, que seja capaz de manter o pêndulo alinhado na vertical e voltado para cima.

CAPÍTULO 2 – REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

Para elaboração desse trabalho foram analisados alguns artigos que tratam de maneiras distintas o problema do pêndulo invertido. Abaixo, serão apresentados os seus respectivos resumos:

No trabalho intitulado “Dinâmica Não Linear do Pêndulo Invertido”, MAHLER e SANTOS, 2011, desenvolveram a modelagem matemática, simulação e um sistema de controle com intuito de simular a dinâmica não linear do pêndulo, utilizando malhas (malha fechada) de controle do tipo LQR (*Linear Quadratic Regulator*). Sabendo que o controle em malha aberta não possui um resultado tão satisfatório para este problema, a utilização do sistema de controle LQR poderá fornecer dados mais eficientes. Assim os resultados obtidos nesse estudo indicam uma boa resposta a partir da utilização do sistema proposto, ou seja, em situações de instabilidade. A utilização do sistema LQR propôs resultados significativos, devido à retroalimentação, sendo assim, estabilizando o pêndulo invertido.

No trabalho intitulado “Projeto e Implementação do Sistema de Controle de um Pêndulo Invertido utilizando o Método do Lugar das Raízes”, BUZETTI et al, 2012, propuseram o controle do pêndulo invertido (*Quanser*) alocado acima de um carro, a partir do Método do Lugar das Raízes (*Root Locus*), os autores evidenciam que esse método é pouco usado nesse tipo problema. As equações de movimento desse pêndulo serão utilizadas nas formas linearizadas e não linearizadas, pois servirão para o emprego do Método do Lugar das Raízes (linearizadas) e também serão utilizadas na implementação no *software* MATLAB/SIMULINK® (não linearizadas). Após a análise em laboratório, e feita as comparações entre gráficos de referência, observa-se que o modelo matemático linearizado é ainda válido e demonstra um resultado satisfatório do sistema controlado.

No trabalho intitulado “Controle de um Pêndulo Invertido utilizando o Modelo Fuzzi Takagi-Sugeno”, TAVARES et al, 2006, propuseram o controle de um pêndulo invertido (*Quanser*), a partir do modelo Fuzzi TS. As equações de movimento do pêndulo invertido serão linearizadas, pois é conveniente para a aplicação desse método. O modelo Fuzzi TS tem como característica a descrição das dinâmicas locais de cada implicação fuzzy (regra) por um modelo de sistema linear. Ao analisar os

resultados numéricos, observa-se a instabilidade em malha aberta, mas em malha fechada o sistema se torna estável, logo, sendo limitado quantitativamente para pequenos deslocamentos angulares da haste do pêndulo.

No trabalho intitulado “Posicionamento de um Pêndulo Invertido usando Algoritmos Genéticos”, CAVALCANTI; ALSINA e FERNEDA, 1999, mostraram o controle de um pêndulo invertido, inicialmente a partir de um Sistema de Controle Inteligente (SCI), mas devido a frequente falha no posicionamento do pêndulo invertido, foi desenvolvido o Sistema de Controle Inteligente Evolucionário (SCIE), esse controlador deve ser capaz de distribuir as tarefas de decisão entre um conjunto de executores de tarefas, utilizando intensivamente os computadores disponíveis para inferir o estado atual do sistema e detectar mudanças no seu estado interno e na sua circunvizinhança. Observa-se que o SCIE consegue manter o pêndulo invertido estável, mesmo falhando em algumas tentativas.

No trabalho intitulado “Controle Fuzzy para Posicionamento de um Pêndulo Invertido”, FILHO et al, 2013, visam apresentar o projeto de um controlador *fuzzy* para o sistema do pêndulo invertido sobre um carro que reaja a perturbações de forma rápida. O pêndulo invertido se destaca, não só por suas diversas aplicações, como controle da atitude de satélites ou a trajetória de foguetes e mísseis, mas por ser um sistema inerentemente instável, sendo não-linear e multivariável, propôs-se o controle da posição angular do pêndulo por meio da lógica *fuzzy*, com a permanência deste na posição vertical e com reação rápida e satisfatória a perturbações externas. Foi utilizado o *software* MATLAB/SIMULINK® na simulação e controle desse pêndulo. Sendo assim, a partir dos resultados, pode-se concluir que os controladores utilizados são de grande interesse, pois minimizam o esforço humano na elaboração dos mesmos, por obterem resultados satisfatórios e por serem estruturas que não apresentam necessidade do modelo do processo.

No trabalho intitulado “Construção, Modelagem e Controle de um Pêndulo Invertido com CLP e Software SCADA”, SILVA, 2013, introduziram um modelo matemático linearizado do sistema elaborado em laboratório. Após a obtenção da resposta em frequência, foram determinadas as funções de transferência do sistema. Em seguida, foram projetados controladores, considerando o vetor de estado disponível, utilizando-se técnica de realimentação dos estados. Ao terminarem a simulação, do sistema controlado no *software* MATLAB®, este foi implementado em um Controlador Lógico Programável (CLP) e utilizado um *software* SCADA. A

avaliação para busca das referências senoidal e degrau foram consistentes, apresentando resultados satisfatórios nos controladores simulados no *software* MATLAB® e também implementado no CLP, mantendo-se a haste equilibrada e seguindo a referência estabelecida para o carro no protótipo desenvolvido e o controlador utilizado apresentou um bom desempenho.

No trabalho intitulado “Dinâmica Não-Linear de um Sistema Mono-Pendular Invertido”, MARQUES, 2013, obteve modelos matemáticos que serviram de referência, para que se possa efetuar os estudos relacionados aos efeitos não-lineares presentes no comportamento dinâmico envolvido na perfuração de petróleo, executada por navios perfuradores. A investigação do problema, em questão, realizou-se por meio de simulações numérico- computacionais, fazendo-se uso do método Runge-Kutta de 4ª ordem para a integração numérica direta das equações de movimento dos sistemas, aproximando suas soluções. Admitindo-se que o controle aplicado nas possíveis irregularidades associadas ao movimento do sistema é do tipo retroalimentação de ajuste de energia de oscilação, proposto anteriormente por TERESHKO (2011) e daí adaptado ao modelo matemático, adotado. Analisando-se os resultados, pode-se concluir que o controle proposto por TERESHKO (2011), foi bem aplicado, havendo levado o sistema às órbitas periódicas harmônicas e controlando o excesso de irregularidades apresentado inicialmente.

No trabalho intitulado “Dinâmica e Controle de Caos de uma Sistema Pendular com Memória de Forma”, COSTA, 2017, desenvolve um estudo sobre a dinâmica e o controle de um sistema mecânico pendular composto por elementos de liga com memória de forma (SMA). A dinâmica do sistema é modelada assumindo que o comportamento termomecânico da SMA é descrito por meio de um modelo constitutivo polinomial dependente da temperatura. Apresenta-se uma investigação numérica do sistema, mostrando comportamentos como órbitas periódicas de períodos variados, coexistência de múltiplas órbitas, caos transiente e caos. Todos os comportamentos são comprovados pelo cálculo dos expoentes de Lyapunov. A técnica de realimentação com estados defasados estendidos é aplicada para o controle do sistema, considerando-se dois tipos de controladores: mecânico e térmico. São realizadas comparações entre o controlador térmico e mecânico, identificando suas diferenças, como maior consumo de energia as possíveis aplicações possuem um grande leque como em sistemas de coleta de energia, sistema de controle de baixo consumo energético, coleta de energia termal por meio do SMA, dentre outros

aspectos. Também se abre a possibilidade da combinação dos atuadores, térmico e mecânico, e a análise sobre melhores estratégias de atuação para um menor consumo de energia.

A partir da análise dos artigos, percebe-se que o problema do pêndulo invertido pode ser resolvido de várias maneiras, mas em todos eles ficou explícito que o controle do pêndulo deve ser feito em malha fechada, ou seja, com a realimentação do sistema.

CAPÍTULO 3 – MODELAGEM MATEMÁTICA DO PÊNDBULO DUPLO INVERTIDO

Nesse capítulo será mostrado o processo de modelagem matemática do pêndulo duplo invertido, utilizando-se o Método de Lagrange. Desse modo, e para a simulação desse modelo, será utilizado o *software* MATLAB® e a ferramenta SIMULINK®.

O processo de modelagem matemática dar-se-á a partir do fluxograma a seguir:

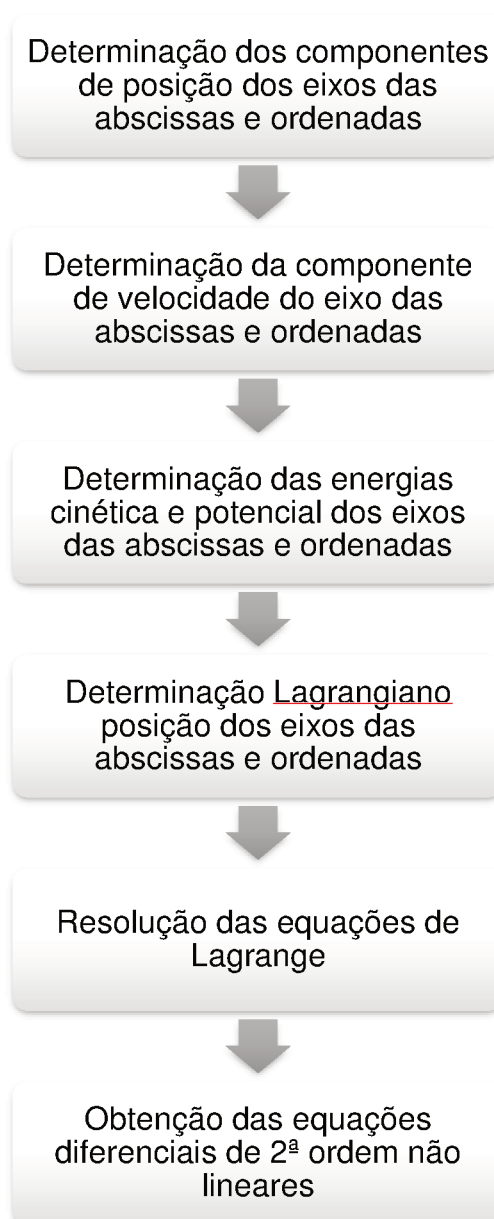


Figura 3.1 – Processo de modelagem matemática
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

3.1 – Determinação das energias cinética e potencial para o pêndulo duplo invertido

A modelagem matemática do pêndulo duplo invertido utiliza como base a ilustração da Fig. 3.2. Nessa figura há duas hastes de comprimentos l_1 e l_2 , pivoteadas uma na base, onde se encontra um sistema de coordenadas inercial, e entre si, se encontra um sistema de coordenadas no ponto de pivoteamento. As variáveis $\theta_1(t)$, medido em relação ao eixo vertical, e $\theta_2(t)$, medido em relação ao prolongamento da haste 1, permitem descrever o movimento angular das hastes 1 e 2, respectivamente. Considera-se a aplicação dos torques T_1 e T_2 nos pontos de pivoteamento, conforme ilustra a referida figura. Além disso, considera também, o efeito de amortecimento viscoso, cujo valor foi arbitrado nos pontos de pivô e para o efeito de resistência do ar imposto ao movimento das hastes.

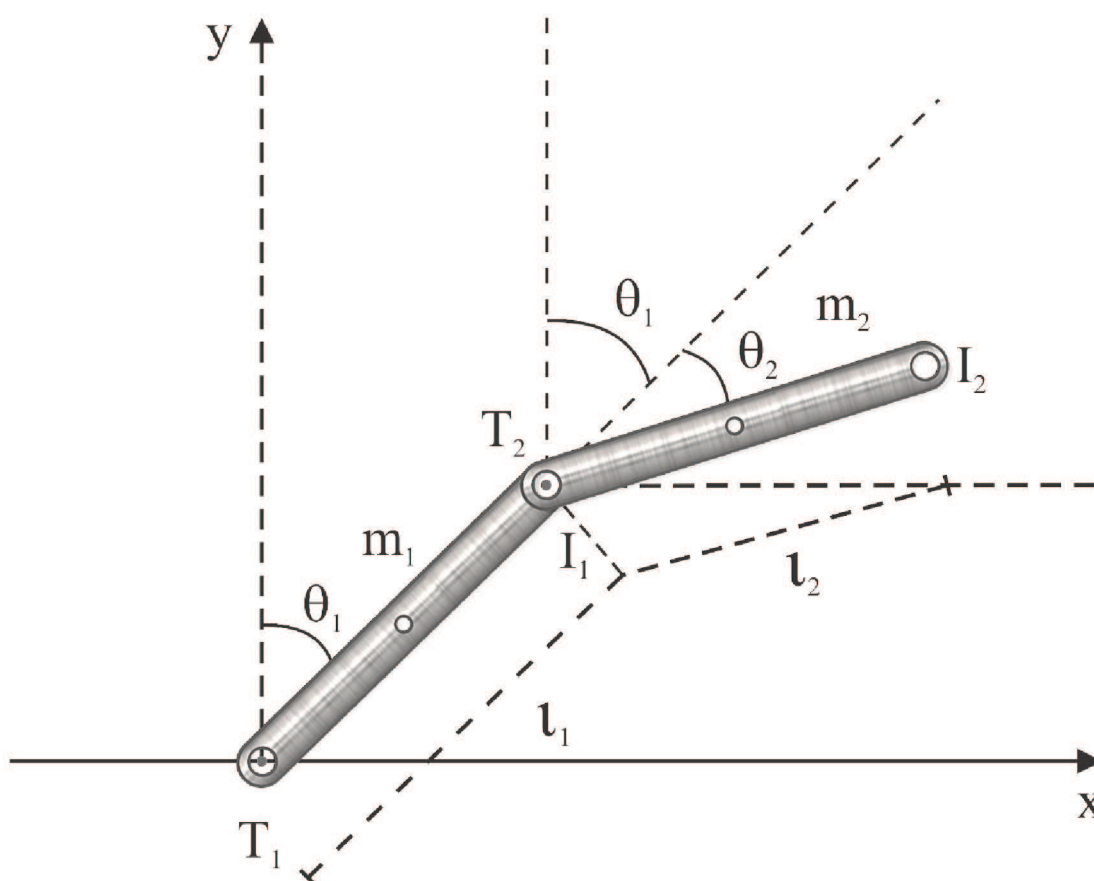


Figura 3.2 – Representação física do pêndulo duplo invertido
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A Tab. 3.1 fornece os parâmetros propostos para a modelagem matemática do pêndulo duplo invertido representado na Fig. 3.2.

Tabela 3.1 – Parâmetros do pêndulo duplo invertido

Simbologia	Descrição
m_1	massa da haste 1
m_2	massa da haste 2
l_1	comprimento da haste 1
l_2	comprimento da haste 2
I_1	momento de inércia na extremidade da haste 1
I_2	momento de inércia na extremidade da haste 2
B_1	coeficiente de amortecimento da haste 1
B_2	coeficiente de amortecimento da haste 2
θ_1	ângulo (em graus) formado entre o eixo vertical e a haste 1
θ_2	ângulo (em graus) formado entre haste 1 e a haste 2
T_1	torque aplicado na haste 1 (1º grau de liberdade)
T_2	torque aplicado na haste 2 (2º grau de liberdade)
g	aceleração da gravidade

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Sejam as equações,

$$K = \frac{mv^2}{2} \quad (1)$$

$$P = mgh \quad (2)$$

a energia cinética (K) e a energia potencial gravitacional (P), respectivamente, do sistema.

Consideremos o Lagrangiano (L), definido por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial \theta_i} + \frac{\partial R}{\partial \dot{\theta}_i} = T_i \quad (3)$$

Onde:

$$L = K - P \quad (4)$$

O Lagrangiano tem as mesmas dimensões da energia, ou seja, no Sistema Internacional de Unidades (SI) sua unidade de medida é o *joule* (J).

A partir da Fig. 3.2, pode-se determinar os componentes de posição em relação aos eixos coordenados e suas respectivas velocidade. É importante observar

que as derivadas são implícitas (NAGLE; SAFF; SNIDER, 2012), pois os ângulos θ_1 e θ_2 dependem do tempo.

Assim, para a haste 1, tem-se:

$$x_1 = l_1 \sin\theta_1 \quad (5)$$

$$y_1 = l_1 \cos\theta_1 \quad (6)$$

Sabendo que a velocidade é derivada da posição em relação tempo, tem-se:

$$\dot{x}_1 = l_1 \cos\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \quad (7)$$

$$\dot{y}_1 = -l_1 \sin\theta_1 \cdot \dot{\theta}_1 \quad (8)$$

As energias, cinética e potencial, são determinadas como seguem, respectivamente:

$$K_1 = \frac{m_1 \left(\dot{x}_1\right)^2}{2} + \frac{m_1 \left(\dot{y}_1\right)^2}{2} + \frac{I_1 \dot{\theta}_1^2}{2} \quad (9)$$

$$P_1 = m_1 g l_1 \cos\theta_1 \quad (10)$$

De maneira similar à haste 1, para a segunda haste, as energias cinéticas e potencial são dadas por:

$$x_2 = l_1 \sin(\theta_1 + \theta_2) \quad (11)$$

$$y_2 = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (12)$$

Sabendo que a velocidade é derivada da posição em relação tempo, tem-se:

$$\dot{x}_2 = l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (13)$$

$$\dot{y}_2 = -l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \cdot (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \quad (14)$$

As energias, cinética e potencial, são determinadas como seguem, respectivamente:

$$K_2 = \frac{m_2 \left(\dot{x}_2\right)^2}{2} + \frac{m_2 \left(\dot{y}_2\right)^2}{2} + \frac{I_2 \dot{\theta}_2^2}{2} \quad (15)$$

$$P_2 = m_2 g l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \quad (16)$$

Nesse trabalho, considera-se que as energias dissipadas em cada articulação comportam-se como um amortecimento viscoso, sendo regidas por:

$$R = \frac{1}{2} B_1 \dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2} B_2 \dot{\theta}_2^2 \quad (17)$$

3.2 – Determinação do modelo para o pêndulo duplo invertido

Considerando o primeiro grau de liberdade do referido sistema físico, substituindo as Eqs. (9) e (10) na Eq. (4), cujo resultado e a Eq. (17) na Eq. (3), e resolvendo a Eq. (3) resultante, obtém-se:

$$(m_1 \ell_1^2 + I_1) \ddot{\theta}_1 - m_1 g \ell_1 \sin \theta_1 = T_1 \quad (18)$$

De forma similar, considerando o segundo grau de liberdade do referido sistema físico, substituindo as Eqs. (15) e (16) na Eq. (4), cujo resultado e a Eq. (17) na Eq. (3), e resolvendo a Eq. (3) resultante, obtém-se:

$$(m_2 \ell_2^2 + I_2) \ddot{\theta}_2 - m_2 g \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{(m_2 \ell_2^2 + I_2)(T_1 + m_1 g \ell_1 \sin \theta_1)}{m_1 \ell_1^2 + I_1} = T_2 \quad (19)$$

Para representar as Eqs. (18) e (19) a partir de diagramas de blocos, necessita-se de isolar as derivadas de maior ordem, resultando:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{T_1 - T_2 + g m_1 \ell_1 \sin \theta_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} - \frac{B_1 \dot{\theta}_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} \quad (20)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{T_2 + g m_2 \ell_2 \sin(\theta_1 + \theta_2)}{I_2 + m_2 \ell_2^2} + \frac{T_2 - T_1 - g m_1 \ell_1 \sin \theta_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} - \frac{B_2 \dot{\theta}_2}{I_2 + m_2 \ell_2^2} + \frac{B_1 \dot{\theta}_1}{I_1 + m_1 \ell_1^2} \quad (21)$$

As equações obtidas acima são de suma importância para a análise do comportamento do pêndulo duplo invertido, e fornecerão informações importantes para a elaboração do sistema de controle.

Para a verificação dos resultados obtidos das equações acima, utilizou-se o *software* wxMaxima, este é uma ferramenta que auxilia na manipulação algébrica e na resolução das derivadas, garantindo a veracidade dos resultados.

CAPÍTULO 4 – SIMULAÇÃO DO PÊNDBULO DUPLO INVERTIDO

Considerando as equações de movimento do pêndulo obtidas no capítulo anterior, será feita a implementação no *software* MATLAB/SIMULINK®, que fornecerá os resultados numéricos e gráficos desse modelo.

4.1 – Simulação das equações de movimento

Em conformidade com a Fig. 3.2, a Tab. 4.1 fornece os parâmetros arbitrários do pêndulo duplo invertido que serão utilizados para a simulação.

Tabela 4.1 – Valores atribuídos aos parâmetros do pêndulo duplo invertido

Simbologia	Valor	Unidade (SI)
$m_1 = m_2 = m$	0,01632	kg
$l_1 = l_2 = l$	0,5	m
$I_1 = I_2$	0	kg · m ²
$B_1 = B_2 = B$	0,0019153	N · s · m ⁻¹
g	-10	m · s ⁻²

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

A Fig. 4.1 ilustra a implementação em diagrama de blocos das Eqs. (20) e (21), utilizando o *software* MATLAB/SIMULINK®, assim permitindo resolver numericamente o modelo e obter os gráficos que ilustrarão o comportamento do pêndulo, devido a aplicação das entradas T_1 e T_2 , assinalando as posições das hastes em relação aos eixos coordenados. Foi considerado que $T_2 = 0$ e $I_1 = I_2 = 0$, objetivando-se analisar o comportamento dinâmico a partir de T_1 e considerando as condições iniciais nulas.

Reescrevendo as Eqs. (20) e (21) a partir das considerações feitas na Tab. 4.1, sobre os parâmetros do pêndulo duplo invertido, obtém-se:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{m\ell^2} T_1 - \frac{1}{m\ell^2} T_2 + \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{B}{m\ell^2} \dot{\theta}_1 \quad (22)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{T_2}{m\ell^2} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta_1 + \theta_2) + \frac{T_2}{m\ell^2} - \frac{T_1}{m\ell^2} - \frac{g}{\ell} \sin \theta_1 - \frac{B}{m\ell^2} \dot{\theta}_2 + \frac{B}{m\ell^2} \dot{\theta}_1 \quad (23)$$

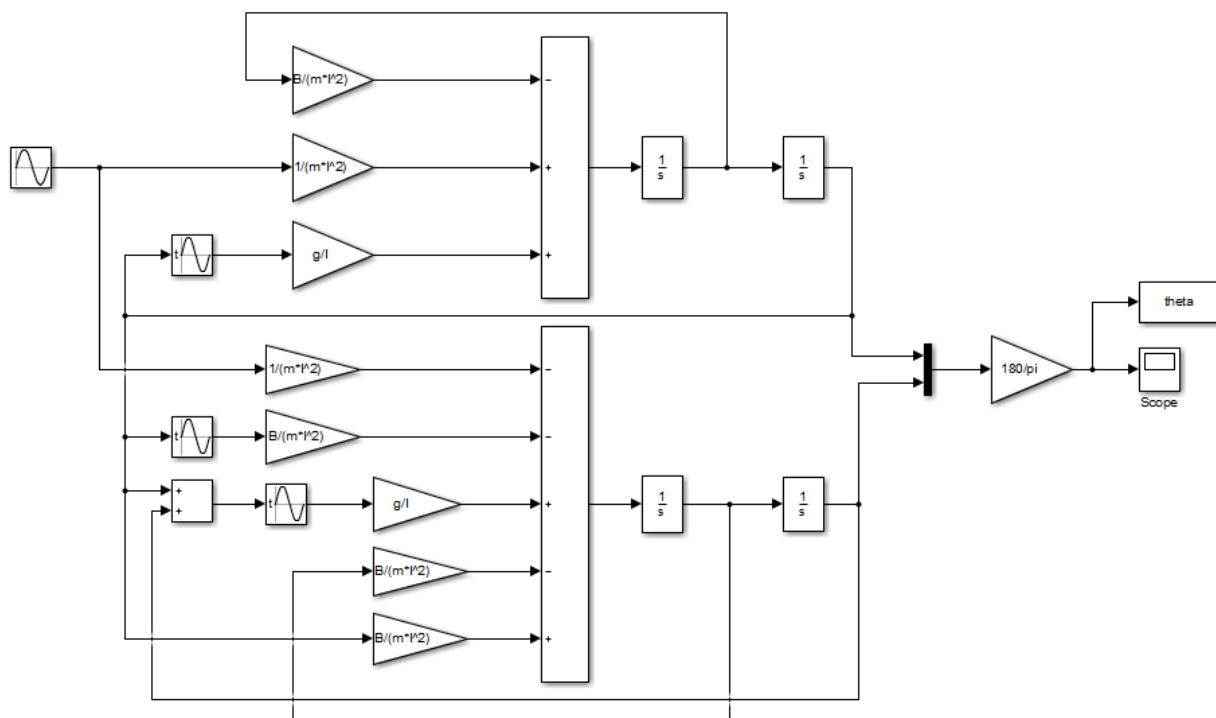


Figura 4.1 – Diagrama de blocos que representa as Eqs. (22) e (23)
 Fonte: Elaborada pelo próprio autor

De acordo com o diagrama de blocos representado na Fig. 4.1, será possível a resolução gráfica e numérica do modelo matemático não linear do pêndulo duplo invertido. Observa-se na Fig. 4.1 que para a simulação dar-se-á a partir de um torque na haste 1 e definido arbitrariamente como sendo uma função seno.

No Cap. 5, serão discutidos os resultados modelados e simulados obtidos, por meio do diagrama de blocos (Fig. 4.1).

CAPÍTULO 5 – DISCUSSÃO SOBRE OS RESULTADOS MODELADOS E SIMULADOS

A partir dos resultados obtidos do diagrama de blocos (Fig. 4.1), foram plotados dois gráficos. O gráfico representado na Fig. 5.1 relaciona a variação angular em função do tempo, enquanto o gráfico Fig. 5.2 relaciona a posição cartesiana do pêndulo duplo invertido em função dos ângulos θ_1 e θ_2 .

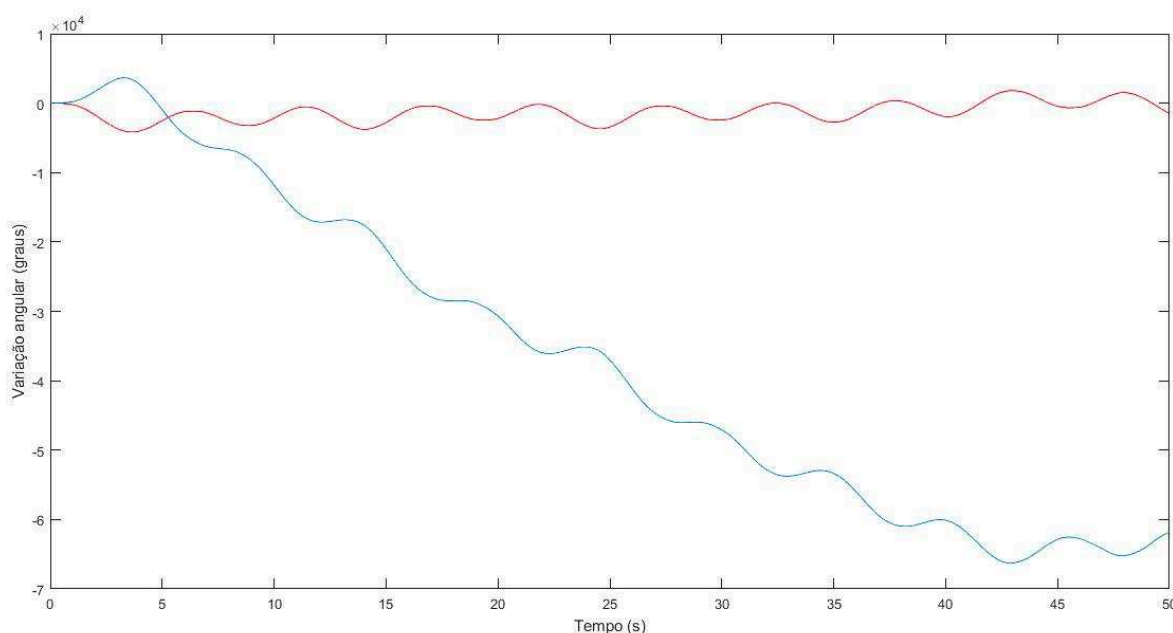


Figura 5.1 – Gráfico da variação angular do pêndulo duplo em função do tempo
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

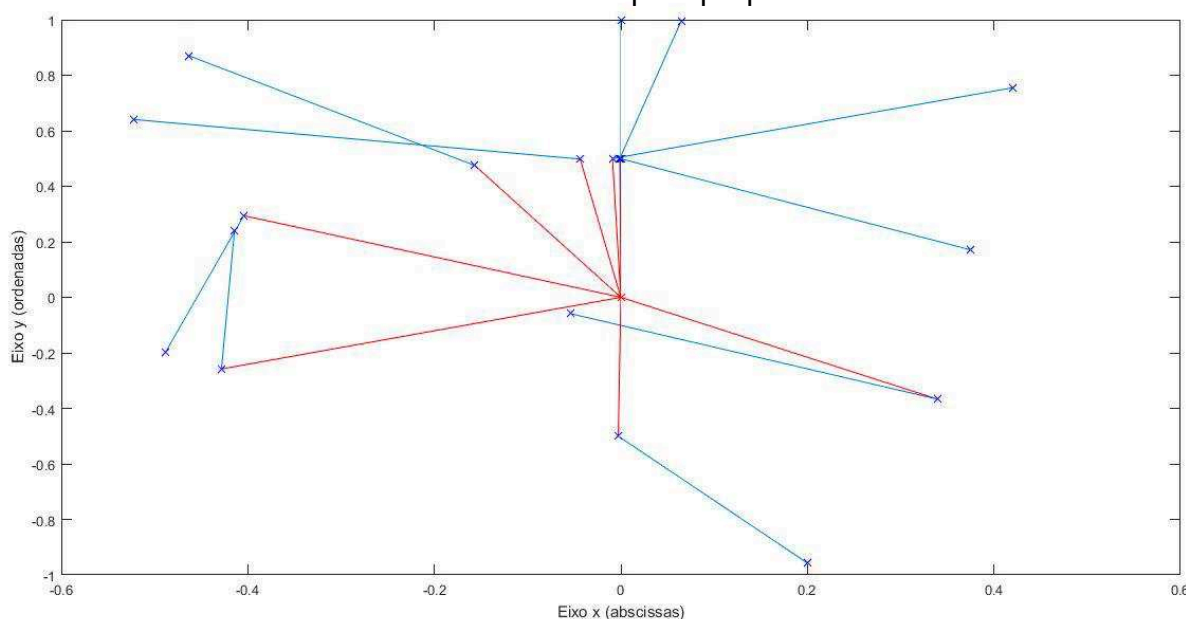


Figura 5.2 – Gráfico da posição cartesiana do pêndulo duplo
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Nas figuras 5.1 e 5.2 estão representadas com a cor vermelha a haste 1 e com a cor azul a haste 2 do respectivo pêndulo duplo invertido mostrado na Fig. 3.2.

Aplicando um torque na haste 1, sendo este definido arbitrariamente como sendo uma função seno (Fig. 4.1) e analisando o gráfico (Fig. 5.1), percebe-se que a variação angular é maior para a haste 2 do que para a haste 1, devido ao fato da haste 2 sofrer a influência da força produzida pela haste 1, e esta sofrerá influência direta do efeito da gravidade que fará com que ela se volte para baixo, e desse modo fazendo o mesmo com a haste 1.

Pode-se constatar tal fato analisando o gráfico (Fig. 5.2) que fornece dez posições do pêndulo duplo invertido, referenciando suas posições no plano cartesiano (abscissas e ordenadas). Também fica evidente a tendência do movimento pendular, buscar um ponto de equilíbrio de estabilidade natural, cujas hastes estariam completamente alinhadas na vertical para baixo. A simulação demonstra que o sistema em malha aberta tem um comportamento instável, uma vez que a manutenção das hastes na posição vertical para cima não é natural para esse sistema, fazendo com que as hastes fiquem girando em torno do ponto de pivoteamento da base. Nota-se também, um movimento angular mais significativo da haste 2, comparado com o da haste 1, cuja amplitude aumenta fortemente com o passar do tempo, distinguindo-se por uma ordem de grandeza de 10^4 em poucos segundos (Fig. 5.1).

Ao analisar o gráfico (Fig.5.2), tem-se a impressão que as hastes têm comprimentos diferentes, mas isso ocorre devido as suas inclinações, esse fato é facilmente explicado pela “lei dos cossenos” que é dada por:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2 \cdot b \cdot c \cdot \cos \theta \quad (24)$$

Até o momento o pêndulo está livre, pois sofre apenas influência das forças naturais desse sistema (forças conservativas). A análise realizada impõe o projeto de um sistema de controle para o movimento desse pêndulo, com o objetivo de mantê-lo alinhado na posição vertical e voltado para cima. Observa-se a necessidade de projetar um sistema de controle clássico MIMO que considere as influências mútuas entre as hastes, uma vez que pequenos movimentos da haste 1 provocam grandes variações de movimentos na haste 2.

Observa-se também que a modelagem matemática do pêndulo duplo invertido requer conhecimento prévio em equação diferencial ordinária, não linear, e sua

simulação necessita da manipulação do *software* MATLAB®, assim como, a ferramenta SIMULINK®, pois possibilita a visualização gráfica do sistema.

Após analisarmos os resultados e ao compararmos com outros métodos, fica explícito que manipulação matemática é trivial em todos os outros, mas a análise gráfica pode ser feita de várias maneiras, tais como, variação angular, posição do pêndulo, tempo do balanço, etc.

Ao analisar os gráficos obtidos, fica aparente que ao aplicarmos um torque na haste 1, a haste 2 comporta-se de maneira caótica, pois não há torque aplicado diretamente sobre ela, logo, a elaboração do sistema de controle se dará sobre a haste 1, primeiramente, com o intuito de compreender a sua influência sobre o movimento da segunda haste. Basicamente, busca-se responder as seguintes perguntas: Pode apenas o controle da haste 1 manter a haste 2 na vertical? Ou a haste 2 cairá sob o efeito da ação da gravidade, mesmo estando a haste 1 mantida na vertical por uma ação de controle, e essa queda gerará movimento na haste 1 devido ao acoplamento físico entre as hastes?

CAPÍTULO 6 – ELABORAÇÃO DO SISTEMA DE CONTROLE DO PÊNDULO INVERTIDO DUPLO

Nesse capítulo será elaborado o sistema de controle MIMO do pêndulo invertido duplo, utilizando a Teoria de Controle Moderno (também chamada de Teoria de Controle no Espaço de Estados). Esse sistema de controle será elaborado com realimentação (malha fechada) e a partir da análise e do ajuste dos parâmetros de um *compensador*. Assim, poderá manter o pêndulo alinhado na vertical e voltado para cima (OGATA, 2010).

6.1 – Modelagem no espaço de estados

Para a elaboração do sistema de controle deve-se linearizar as Eqs. (20) e (21), admitindo que $\sin \theta \approx \theta$, e utilizando os parâmetros da Tab. 4.1, tem-se:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{1}{m\ell^2} T_1 - \frac{1}{m\ell^2} T_2 + \frac{g}{\ell} \theta_1 - \frac{B}{m\ell^2} \dot{\theta}_1 \quad (25)$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2}{m\ell^2} T_2 - \frac{1}{m\ell^2} T_1 + \frac{g}{\ell} \theta_2 - \frac{B}{m\ell^2} \dot{\theta}_2 + \frac{B}{m\ell^2} \dot{\theta}_1 \quad (26)$$

Há também a necessidade de representar as Eqs. (25) e (26) no espaço de estados, admitindo as variáveis de estado a seguir:

$$x_1 = \theta_1 \Rightarrow \dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 \quad (27)$$

$$x_2 = \theta_2 \Rightarrow \dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 \quad (28)$$

$$x_3 = \dot{\theta}_1 \Rightarrow \dot{x}_3 = \ddot{\theta}_1 \quad (29)$$

$$x_4 = \dot{\theta}_2 \Rightarrow \dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 \quad (30)$$

Substituindo as Eqs. (27) e (28) na eq. (25), tem-se:

$$\dot{x}_3 = \frac{g}{\ell} x_1 - \frac{B}{m\ell^2} x_3 + \frac{1}{m\ell^2} T_1 - \frac{1}{m\ell^2} T_2 \quad (31)$$

Substituindo as Eqs. (29) e (30) na eq. (26), tem-se:

$$\dot{x}_4 = \frac{g}{\ell} x_2 + \frac{B}{m\ell^2} x_3 - \frac{B}{m\ell^2} x_4 - \frac{1}{m\ell^2} T_1 + \frac{2}{m\ell^2} T_2 \quad (32)$$

Representando as Eqs. (31) e (32) na forma matricial, tem-se:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{g}{\ell} & 0 & -\frac{B}{m\ell^2} & 0 \\ 0 & \frac{g}{\ell} & \frac{B}{m\ell^2} & -\frac{B}{m\ell^2} \end{pmatrix} \quad (33)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -\frac{1}{m\ell^2} & \frac{2}{m\ell^2} \end{pmatrix} \quad (34)$$

Utilizando a equação de Estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (35)$$

Admitindo-se que Ação de Controle representada por:

$$u = -kx \quad (36)$$

Substituindo a eq. (35) na eq. (36), tem-se:

$$\dot{x} = Ax - Bkx \quad (37)$$

Aplicando a Transformada de Laplace inversa, tem-se:

$$x(s)s = Ax(s) - Bkx(s) \quad (38)$$

Colocando o termo $x(s)$ em evidência, tem-se:

$$(Is - A + Bk)x(s) = 0 \quad (39)$$

Admitindo as equações matriciais:

$$Is = \begin{pmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{pmatrix} \quad (40)$$

$$k = \begin{pmatrix} k_1 & k_2 & k_3 & k_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (41)$$

Admitindo-se:

$$\det(Is - A + Bk) = 0 \quad (42)$$

Resolvendo a eq. (42), tem-se:

$$s^4 - 245,0980k_4s^3 + 245,0980k_3s^3 + 0,9389s^3 - 115,0579k_3s^2 - 245,0980k_2s^2 + 245,0980k_1s^2 + 40,2204s^2 - 9918,9795k_4s + 4901,9608k_3s - 115,0579k_1s + 18,7774s - 9918,9795k_2 + 4901,9608k_1 + 400 = 0 \quad (43)$$

Para a determinação dos polos (raízes do polinômio), tem-se:

$$(s^2 + 2\xi_1\omega_1s + \omega_1^2) \cdot (s^2 + 2\xi_2\omega_2s + \omega_2^2) = 0 \quad (44)$$

Para a determinação dos coeficientes ξ_1 , ξ_2 , ω_1 e ω_2 , admitem-se as equações:

$$\xi = \frac{\ln(M_p)}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2(M_p)}} \quad (45)$$

$$\omega = \frac{\arctg\left(\frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi}\right)}{T_p \cdot \sqrt{1-\xi^2}} \quad (46)$$

Substituindo os valores de $M_p = 10$ e $T_p = 13$ as Eqs. (45) e (46) e resolvendo-as, obtém-se:

$$\xi_1 = 0,6$$

$$\xi_2 = 0,8$$

$$\omega_1 = 5$$

$$\omega_2 = 10$$

Substituindo os valores obtidos acima na eq. (44), tem-se:

$$s^4 + 22s^3 + 221s^2 + 1000s + 2500 = 0 \quad (47)$$

Igualando-se as Eqs. (43) e (47), tem-se:

$$\begin{cases} 245,0980k_3 - 245,0980k_4 = 22 \\ 245,0980k_1 - 245,0980k_2 - 115,0579k_3 = 181,22 \\ -115,0579k_1 + 4901,9608k_3 - 9918,9765k_4 = 1000 \\ 4901,9608k_1 - 9918,9765k_2 = 2100 \end{cases} \quad (48)$$

Representando a eq. (48) na forma matricial, tem-se:

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 245,0980 & -245,0980 \\ 245,0980 & -245,0980 & -115,0579 & 0 \\ -115,0579 & 0 & 4901,9608 & -9918,9765 \\ 4901,9608 & -9918,9765 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (49)$$

$$W_E = \begin{pmatrix} 22 \\ 181,22 \\ 1000 \\ 2100 \end{pmatrix} \quad (50)$$

Para determinar o valor da matriz k , que resulte em um comportamento adequado do pêndulo duplo invertido, no caso, para mantê-lo alinhado na vertical e voltado para cima, admite-se a equação matricial:

$$W \cdot k = W_E \quad (51)$$

Isolando a matriz k , tem-se:

$$k = W^{-1} \cdot W_E \quad (52)$$

Substituindo as Eqs. (51) e (52) na eq. (54) e resolvendo-a, tem-se:

$$k = \begin{pmatrix} 1,0016 \\ 0,2833 \\ -0,0448 \\ -0,1346 \end{pmatrix} \quad (53)$$

Utilizando-se dos valores obtidos na eq. (53), pode-se implementar o projeto do sistema de controle desse pêndulo duplo invertido.

Para a verificação dos resultados obtidos das equações acima, utilizou-se o *software* wxMaxima, este é uma ferramenta que auxilia na manipulação algébrica, garantindo a veracidade dos resultados.

6.2 – Discussão dos resultados obtidos na implementação e simulação do modelo para o pêndulo duplo invertido no espaço de estados

A implementação do modelo no espaço de estados dar-se-á a partir do *software* MATLAB®, que resultará no projeto do controlador do pêndulo duplo invertido representado no diagrama de blocos a seguir:

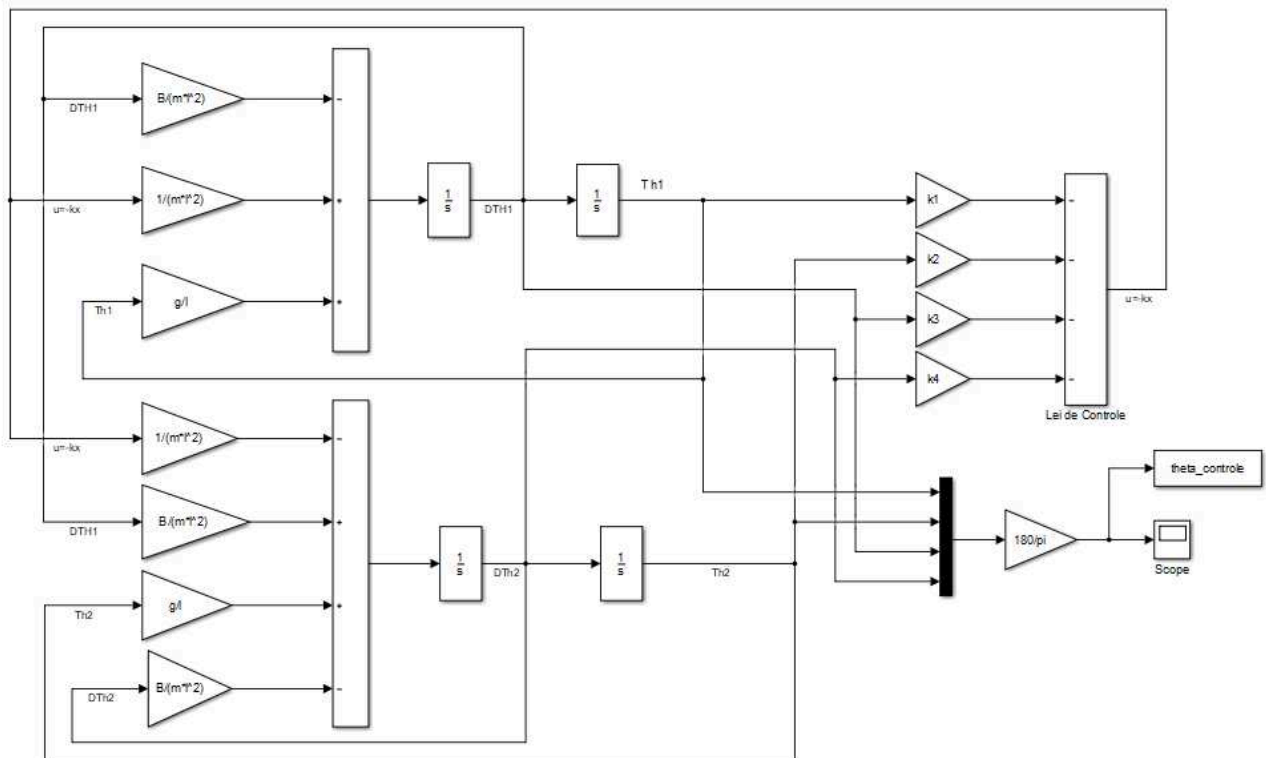


Figura 6.1 – Diagrama de blocos que representa o projeto do controlador do pêndulo duplo invertido

Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Para a simulação do projeto do controlador do pêndulo duplo, foram admitidas as seguintes condições iniciais para as variáveis de estado:

$$\theta_1 = 0,1 \text{ rad (Theta 1)}$$

$$\theta_2 = 0,02 \text{ rad (Theta 2)}$$

$$\dot{\theta}_1 = 0,3 \text{ rad/s (DTheta 1)}$$

$$\dot{\theta}_2 = 0,6 \text{ rad/s (DTheta 2)}$$

Levando em consideração que a rotação do pêndulo em torno dos pontos de pivoteamento seja dado a partir do sentido horário (negativo), e sentido anti-horário

(positivo), obtém-se o gráfico (Fig. 6.2) que relaciona as variáveis de estado do pêndulo duplo em função do tempo.

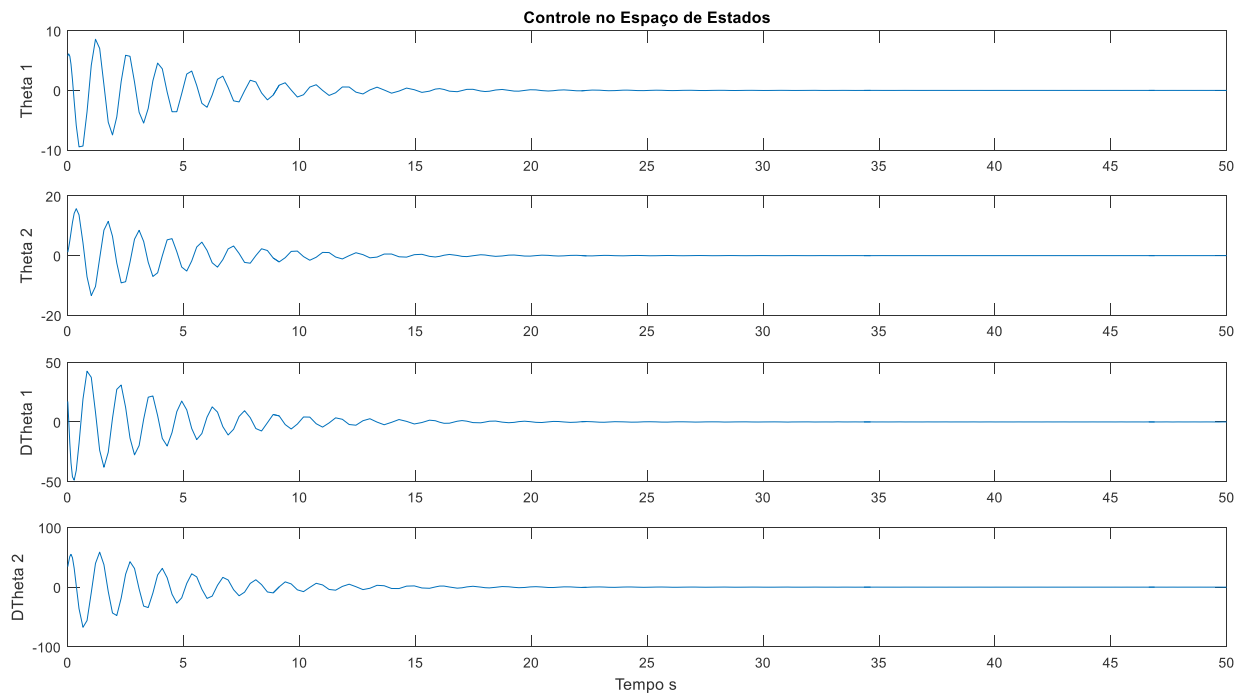


Figura 6.2 – Gráfico das variáveis de estado do pêndulo em função do tempo
Fonte: Elaborada pelo próprio autor

Analisando o gráfico e admitindo que a haste 1 depende apenas das variáveis de estado θ_1 e $\dot{\theta}_1$, enquanto a haste 2 dependerá de θ_1 , θ_2 , $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$. Percebe-se que a haste 1 ao movimentar no sentido horário, a haste 2 movimenta-se no sentido anti-horário e vice-versa em aproximadamente todo o intervalo de 0 a 15 s, mas a partir daí o sistema controle começa a agir no intuito de estabilizar o movimento pendular e fazer manutenção do pêndulo duplo na posição vertical para cima.

CAPÍTULO 7 – CONCLUSÃO

Esse trabalho expôs o assunto pêndulo simples, pêndulo invertido e algumas de suas aplicações no dia a dia, pois é muito comum para a comunidade científica, em especial a Engenharia Mecânica – Automação.

O foco dessa dissertação foi o pêndulo duplo invertido, mostrou-se todo o processo de modelagem matemática (não linear e linear), simulação e finalmente o projeto de controle desse pêndulo. Assim para a elaboração do projeto de controle desse pêndulo duplo invertido, foi necessário a análise de todos os resultados obtidos nas modelagens e simulações feitas, desde as equações não lineares até as lineares. Após feitas essas análises, pode-se resolver o problema proposto por esse trabalho; colocar o pêndulo duplo invertido na vertical, voltado para cima e mantê-lo nessa posição, aplicando um torque apenas na haste 1.

Observa-se que o pêndulo duplo invertido depende de um controle com realimentação, pois devido as forças conservativas se voltará sempre baixo. Após a análise preliminar dos resultados obtidos sem realimentação, define que o projeto do sistema de controle que deverá agir no ponto de pivoteamento da haste 1. Aplicando o sistema de controle nesse ponto, percebe-se que o movimento pendular varia no sentido horário e anti-horário durante algum tempo, porém em certo momento estabiliza-se, pois, o sistema de controle consegue estabelecer a manutenção do pêndulo duplo invertido na vertical para cima.

Conclui-se que o pêndulo duplo invertido possui uma instabilidade natural, devido ao efeito da gravidade, no entanto ao aplicarmos o sistema de controle na haste 1, consegue realizar o controle desse pêndulo, mantendo-o na vertical e voltado para cima.

A elaboração de um sistema de controle atuante na haste 2 é uma proposição interessante para trabalhos futuros, pois pode-se utilizar os resultados obtidos nesse trabalho para obtenção de novos resultados.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. tradutora Elza F. Gomide. São Paulo: Edgard Blücher, 1974.
- BUZETTI, Ariel S.; RIBEIRO, Jean M. S.; TEIXEIRA, Marcelo C. M.; GARCIA, José P. F.; ASSUNÇÃO, Edvaldo; SILVA, Edilson A. **Projeto e implementação do sistema de controle de um pêndulo invertido utilizando o método do lugar das raízes**. Anais do XIX Congresso Brasileiro de Automática, CBA 2012.
- CARRON, Wilson; GUIMARÃES Osvaldo **As faces da física**, volume único. São Paulo: Moderna, 1997.
- CAVALCANTI, José H. F.; ALSINA Pablo J.; FERNEDA Edilson **Posicionamento de um pêndulo invertido usando algoritmos genéticos**. SBA Controle & Automação 1999.
- COSTA, Dimitri D. A. **Dinâmica e Controle de Caos de um Sistema Pendular com Memória de Forma**. 82f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, 2017.
- DORF, Richard; BISHOP, Robert, **Sistemas de Controle Modernos**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 1998.
- FILHO, Moisés D.; JESUS, Helga G. C. F. M.; CORTES, Jacqueline M. R.; CARVALHO, Adelson S.; JUNIOR, Geraldo G. de P. **Controle Fuzzy para Posicionamento de um Pêndulo Invertido**. X Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia, SEGet 2013.
- HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl **Fundamentos da Física**. V. 1. 4. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1996.
- MAHLER, Wagner F. C.; SANTOS Denilson P. S. **Dinâmica não linear do pêndulo invertido**. 10^a Conferência Brasileira de Dinâmica, Controle e Aplicações, DINCON 2011.
- MARQUES, Carlos E. **Dinâmica Não-Linear de um Sistema Mono-Pendular Invertido**. 104f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita e Filho” – UNESP, 2013.
- NAGLE, Kent R.; SAFF, Edward B.; SNIDER, Arthur D. **Equações diferenciais**. tradutor Daniel Vieira. 8. ed. São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2012.

OGATA, Katsuhiko **Engenharia de Controle Moderno**. tradutora Heloísa Coimbra de Souza; revisor técnico Eduardo Aoun Tannuri. 5. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

SILVA, Edilson A. da **Construção, Modelagem e Controle de um Pêndulo Invertido com CLP e Software SCADA**. 77f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Elétrica) – Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita e Filho” – UNESP, 2013.

TAVARES, Maria A.; SANTOS Rodrigo B.; NETO Camilo M.; JÚNIOR Vicente L. **Controle de um pêndulo invertido utilizando o modelo Fuzzi Takagi-Sugeno**, 16^o Simpósio de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, POSMEC 2006.

TIPLER, Paul A.; MOSCA, Gene **Física para cientistas e engenheiros – Mecânica, Oscilações e Ondas, Termodinâmica**. V. 1. 5. ed. LTC, 2006.