

**UNIVERSIDADE DE TAUBATÉ**

**Saulo Marcondes de Moura**

**VIBRAÇÕES EM ARQUIBANCADAS: análise dinâmica de  
um modelo de viga**

**Taubaté - SP**

**2020**

**Saulo Marcondes de Moura**

**VIBRAÇÕES EM ARQUIBANCADAS: análise  
dinâmica de um modelo de viga**

Trabalho Final de Graduação submetido ao Departamento de Engenharia Civil como requisito para obtenção do grau de Engenheiro Civil, na Universidade de Taubaté

Orientador: Prof. J. Guido Damilano, Ph.D

**Taubaté - SP**

**2020**

**Grupo Especial de Tratamento da Informação - GETI**  
**Sistema Integrado de Bibliotecas -SIBi**  
**Universidade de Taubaté - UNITAU**

M929v Moura, Saulo Marcondes de  
Vibrações em arquibancadas : análise dinâmica de um modelo  
de viga / Saulo Marcondes de Moura. -- Taubaté : 2020.  
62 f. : il.

Trabalho (graduação) - Universidade de Taubaté,  
Departamento de Gestão e Negócios / Eng. Civil e Ambiental,  
2020.

Orientação: Prof. Dr. José Guido Damilano, Departamento de  
Engenharia Civil

1. Análise estrutural (Engenharia) - Modelos matemáticos. 2.  
Engenharia de estruturas. 3. Dinâmica estrutural. I. Título.

CDD - 624.171

**SAULO MARCONDES DE MOURA**

**VIBRAÇÕES EM ARQUIBANCADAS: análise dinâmica de um modelo de viga**

Trabalho Final de Graduação submetido ao Departamento de Engenharia Civil como requisito para obtenção do grau de Engenheiro Civil, na Universidade de Taubaté

Aprovado em:

---

*Prof. J. Guido Damilano, Ph.D. - UNITAU*

*(Orientador)*

---

*Prof. Antonio Wanderley Terni, Dr. - UNITAU*

---

*Prof. Jairo Cabral Júnior, Ms. - UNITAU*

Dedico este trabalho a minha família e aos professores que sempre me apoiaram durante a minha trajetória acadêmica.

## **AGRADECIMENTOS**

Aos meus pais, José Antônio e Eunice, que sempre me apoiaram e incentivaram aos estudos, contribuindo para minha formação.

Em especial à minha esposa, pela sua paciência, compreensão e todo o suporte que me deu durante toda esta graduação.

À Instituição de ensino, aos diretores e professores que contribuíram para minha caminhada acadêmica.

Ao meu orientador J. Guido Damilano, pelo profissionalismo e pelos momentos de ajuda, incentivo e atenção.

A Deus, por sempre estar ao meu lado e prover equilíbrio para minhas decisões.

Obrigado a todos de coração!

*Lembre-se que as pessoas podem tirar tudo de você, menos o seu conhecimento.*

*Albert Einstein*

## RESUMO

Arquibancadas de estádios de futebol, assim como a maioria das estruturas de engenharia civil, estarão sempre sujeitas à ações tanto estáticas quanto dinâmicas. As ações dinâmicas geradas pelas atividades humanas, apesar de serem ações de menor magnitude que aquelas geradas, por exemplo, pelo peso próprio da estrutura, terremotos, ventos, etc, podem causar efeitos indesejáveis à estrutura, além de promoverem sensíveis desconfortos aos ocupantes. O objetivo deste trabalho é fazer uma análise dinâmica, predominantemente qualitativa, do comportamento de um modelo estrutural simples de um trecho de arquibancada sob a ação de um carregamento causado pelos saltos sincronizados de pessoas ocupando esse espaço. O método dos elementos finitos é usado para discretizar o modelo. O sistema de equações de movimento resultante é integrado no tempo através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, empregando-se variáveis de estado. Os resultados demonstram que os deslocamentos máximos devidos à ação dinâmica, em muitos casos, podem ser superiores àqueles obtidos com um carregamento estático equivalente. Isso indica a importância da análise dinâmica, ainda em fase de projeto preliminar, buscando atender não somente aos critérios de segurança mas também assegurar o conforto dos ocupantes desse tipo de espaço.

Palavras Chave: Análise Dinâmica, Modelagem Numérica, Vibração de Estruturas, Cargas Dinâmicas, Arquibancadas, Estádios de Futebol.

## **ABSTRACT**

Stadiums grandstands, as well as most civil engineering structures, always will be under the action of static and dynamic loads. Dynamic loads due to human activities, such as dancing, jumping, etc, although of lower amplitude than those generated by the structure's own weight, earthquakes, winds, etc, may cause undesirable effects to a building, besides generating uneasiness to its occupants. This work aims to do a dynamic analysis, predominately qualitative, of the behavior of a simple structural model of a stadium grandstand under the action of loads caused by the synchronized jumping of people on top of it. The finite element model is used to discretize the model, and the resulting system of equations of motion is time integrated through the Runge-Kutta method of 4<sup>th</sup> order, employing state variables. Results show that displacements due to dynamic loads, in several cases, may be much larger than those obtained with a static equivalent load. This emphasizes the importance of dynamic analyzes, even in the preliminary phases of design, aiming to guaranty not only a building's safety criteria, but also the comfort of its occupants.

Keywords: Dynamic Analysis, Numerical Modeling, Structural Vibration, Dynamic Loads, Stadiums Grandstands, Football Stadiums.

## LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1: Deslocamentos excessivos no estádio frankenstadium.....	13
FIGURA 2: Representação de um movimento harmônico .....	17
FIGURA 3: movimento harmônico representado por um ponto que se move sob uma circunferência.....	18
FIGURA 4: Deslocamento, velocidade e aceleração .....	18
FIGURA 5: Sistema massa-mola e diagrama de corpo livre .....	19
FIGURA 6: Sistema massa-mola amortecido e diagrama de corpo livre .....	21
FIGURA 7: Oscilação com amortecimento subcrítico .....	23
FIGURA 8: Oscilação com superamortecimento.....	24
FIGURA 9: Oscilação com superamortecimento.....	24
FIGURA 10: Sistema massa-mola amortecido e diagrama de corpo livre .....	25
FIGURA 11: Soluções homogênea, complementar e geral de um caso de excitação harmônica.....	26
FIGURA 12: Representações das funções forçante e resposta .....	26
FIGURA 13: Gráfico relativo as equações 3.45 e 3.46.....	27
FIGURA 14: Sistema massa-mola amortecedor com vários graus de liberdade.....	29
FIGURA 15: Processo de análise por elementos finitos.....	32
FIGURA 16: Elemento de viga uniforme .....	33
FIGURA 17: Representação da montagem das matrizes de massa e rigidez a partir das matrizes dos elementos.....	35
FIGURA 18: Movimento do corpo durante o salto.....	38
FIGURA 19: Carregamento dinâmico de um salto normal .....	40
FIGURA 20: Tipos de degraus das bancadas do estádio do Dragão - Porto - Portugal .....	46
FIGURA 21: Seção da viga do modelo de estudado.....	47
FIGURA 22: Representação do modelo adotado.....	47
FIGURA 23: Carregamento estático.....	50
FIGURA 24: Modelo de carregamento do estudo de caso Nº 6 .....	50
FIGURA 25: Deslocamentos devidos à carga estática.....	51
FIGURA 26: Força gerada pelo salto de uma pessoa.....	52
FIGURA 27: Modelo estudo de caso Nº 3 .....	52
FIGURA 28: Deslocamentos dos nós da viga modelo com o carregamento dinâmico .....	53
FIGURA 29: Velocidade dos nós da viga modelo com o carregamento dinâmico ....	54
FIGURA 30: Acelerações dos nós da viga modelo com o carregamento dinâmico ..	54
FIGURA 31: Deslocamentos máximos dos nós em função da frequência da atividade .....	55
FIGURA 32: Evolução da frequência natural com a variação do comprimento da viga .....	56
FIGURA 33: Dorça gerada pelos saltos assíncronos (estudo de caso Nº 6).....	57
FIGURA 34: Deslocamentos dos nós da viga com saltos assíncronos (estudo de caso Nº 6).....	58
FIGURA 35: Velocidade dos nós (estudo de caso Nº 6) .....	59
FIGURA 36: Acelerações dos nós (estudo de caso Nº 6) .....	59

## LISTA DE QUADROS

QUADRO 1: Frequências críticas e naturais mínimas segundo a nbr 6118:2014.....	37
QUADRO 2: Coeficientes de fourier para diferentes tipos de salto .....	39
QUADRO 3: Tipos de atividades e sua aplicabilidade a diferentes atividades reais e tipos de estruturas .....	41
QUADRO 4 – Modelos numéricos de degraus.....	45
QUADRO 5: Propriedades da viga modelo .....	48
QUADRO 6: Frequências naturais da viga modelo .....	51
QUADRO 7: Limiares da percepção humana para vibrações harmônicas verticais..	55

## LISTA DE ABREVIATURAS E DE SÍMBOLOS

$f$	frequência de oscilação em Hertz (Hz)
$\tau$	período de oscilação em segundos (s)
$x$	variável independente espacial
$A$	amplitude de oscilação
$t$	tempo
$\omega$	frequência angular
$k$	constante de rigidez
$m$	massa
$\Delta$	deslocamento da mola na posição de equilíbrio estático
$\omega_n$	frequência natural de um sistema mecânico, medida em radianos/s
$f_n$	frequência natural de um sistema mecânico, medida em Hertz (Hz)
$c$	constante de amortecimento
$c_c$	constante de amortecimento crítico
$\xi$	fator de amortecimento
$[m]$	matriz de massa do elemento
$[c]$	matriz de amortecimento do elemento
$[k]$	matriz de rigidez do elemento
$\vec{F}$	vetor de forças global
$\vec{x}$	vetor de deslocamentos
$\vec{\dot{x}}$	vetor de velocidades
$\vec{\ddot{x}}$	vetor de acelerações
$[M]$	matriz de massa global
$[K]$	matriz de rigidez global
$[C]$	matriz de amortecimento global
$R$	função dissipativa de Rayleigh
$F_0$	carga estática
$\alpha_n$	coeficiente de Fourier
$N$	número total de harmônicos

$\phi_n$  ângulo de fase

$\vec{F}$  vetor de Forças

$\vec{K}_1, \vec{K}_2, \vec{K}_3, \vec{K}_4$  vetores do método de Runge-Kutta de 4ª ordem

$A_s$  Área da seção transversal

$I$  momento de inércia

$L$  comprimento da viga

$n$  número de elementos

$E$  módulo de elasticidade do material

$L_e$  comprimento do elemento

$\rho$  massa específica do material

# SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	13
2. OBJETIVO .....	15
3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA .....	16
3.1 Vibração.....	16
3.2 Movimento harmônico .....	17
3.2.1 Vibração livre.....	19
3.2.2 Vibração livre amortecida .....	20
3.2.3 Movimento excitado harmonicamente .....	25
3.3 Sistemas de muitos graus de liberdade .....	28
3.4 Método dos elementos finitos.....	31
3.5 Matriz de massa e rigidez para um elemento de viga .....	32
3.6 Matrizes de massa e rigidez globais .....	35
3.7 Determinação das frequências naturais .....	35
3.8 Matriz de amortecimento global .....	37
3.9 Modelo de carregamento dinâmico .....	38
3.10 Variáveis de estado.....	41
3.11 Método de Runge-Kutta .....	43
4. DESENVOLVIMENTO.....	45
5. RESULTADOS E DISCUSSÃO .....	51
6. CONCLUSÃO .....	60
7. REFERÊNCIAS .....	61

## 1. INTRODUÇÃO

Diversas atividades humanas como caminhar, correr, pular e dançar podem gerar ações dinâmicas em estruturas. Apesar destas ações serem geralmente de intensidade inferior às cargas dinâmicas presentes na natureza como por exemplo as ações de ventos e terremotos, tais atividades humanas quando realizadas sob condições específicas podem gerar vibrações excessivas e conseqüentemente trazer desconforto às pessoas presentes no ambiente.

No caso de estádios de futebol e arenas poliesportivas de multiuso, quando um grande número de pessoas pula sincronizadamente num movimento coordenado e periódico tem-se, combinado ao fato de estruturas projetadas para vencerem vãos cada vez maiores e cada vez mais esbeltas para ampliar o campo de visão dos espectadores, um ambiente favorável ao aparecimento de vibrações excessivas que devem ser estudadas do ponto de vista dinâmico ainda durante a fase de projeto.

Um dos acontecimentos que recentemente tomaram maior notoriedade pela divulgação de vídeos na internet foi no estádio de Frankenstadium na Alemanha onde em função dos saltos sincronizados da torcida, a bancada do anel superior apresentava deslocamentos notáveis. À época, os responsáveis afirmaram que os deslocamentos observados não colocavam em risco a segurança dos torcedores.

FIGURA 1: DESLOCAMENTOS EXCESSIVOS NO ESTÁDIO *FRANKENSTADIUM*



Fonte: Silva, 2012.

No entanto, em casos mais extremos, além do desconforto aos espectadores, estas vibrações podem causar danos à própria estrutura. Uma exemplificação deste problema foi um evento de show de Rock realizado no estádio Nya Ullevi, Gothenburg na Suécia, no verão de 1985. Segundo Erlingsson e Bodare (1996), durante o show os cabos de sustentação da cobertura vibraram violentamente, com amplitudes de deslocamento avaliadas de 5 a 30 cm por diferentes observadores. A cobertura do estádio deslocava-se substancialmente para cima e para baixo. As partes superiores das arquibancadas se moveram tão violentamente que parte dos espectadores deixou seus lugares. Ao final, foram identificados danos no teto, numa moldura de uma janela e, inclusive, um cano de esgoto que teria se rompido durante o evento.

Exemplos como os mencionados acima demonstram a importância da análise dinâmica de estruturas que estão sujeitas a cargas dinâmicas devido a atividade humana, mesmo que estas sejam de menor intensidade que aquelas devidas a fenômenos naturais de maior magnitude.

O presente trabalho faz uma análise predominantemente qualitativa do comportamento de um modelo estrutural de uma arquibancada submetida a ação de atividades humanas, tal como saltar.

## **2. OBJETIVO**

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento de um modelo de viga submetida a uma carga dinâmica modelada como a ação de pessoas saltando de forma simultânea e sincronizada, como comumente observa-se em estádios com torcidas.

O modelo utiliza o método dos elementos finitos para a discretização da viga como um sistema de vários graus de liberdade. A resolução do sistema de equações de movimento é feita através do método de Runge-Kutta de 4ª ordem, empregando-se variáveis de estado.

### 3. REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

#### 3.1 Vibração

Vibração é definida como uma oscilação periódica de uma partícula ou corpo em torno de um ponto de equilíbrio. Assim sendo, todos corpos dotados de massa e elasticidade estão sujeitos a vibração, seja ela causada por forças ou deslocamentos.

A vibração pode ser classificada quanto:

- ✓ À excitação: livre ou forçada;
- ✓ Ao amortecimento: amortecida ou não amortecida;
- ✓ À força: determinística ou aleatória;
- ✓ Às equações envolvidas: lineares ou não lineares.

A *vibração livre* ocorre devido às forças inerentes ao sistema e na ausência de forças externas. Neste caso, o sistema pode oscilar com uma ou mais de suas frequências naturais.

Já as *vibrações forçadas* ocorrem sob a ação de forças externas e sendo uma excitação oscilatória, obrigatoriamente o sistema irá vibrar na frequência de excitação. Neste último caso, se a frequência de oscilação coincide com uma frequência natural do sistema, grandes amplitudes e deslocamentos podem ser atingidos e resultar em colapso da estrutura. (Thomson, 1978).

Segundo Soriano (2014), nos sistemas dinâmicos reais sempre há dissipação de energia que tende a reduzir as amplitudes das oscilações, o que é simulado através de forças que se opõem ao movimento, denominadas forças de amortecimento. Em alguns casos estas são muito pequenas e podem ser desprezadas para fins de análise e cálculo da frequência natural por exemplo. No entanto, o amortecimento se faz necessário para fins de limitação da amplitude de oscilação.

Para as vibrações lineares prevalece o princípio da superposição onde existe uma vasta quantidade de métodos matemáticos existentes para solução destes tipos de problemas.

Além da amplitude e da frequência de oscilação, um sistema também é caracterizado pelo *grau de liberdade* que é definido como o número de coordenadas independentes requerido para descrição do movimento. Desta maneira, para uma partícula livre, três graus de liberdade definiriam seu movimento (três possíveis direções), ao passo que para um corpo rígido são seis graus de liberdade, pois além das três direções do movimento é necessário incluir os três eixos de rotação. No caso

de um corpo elástico contínuo, o número de graus de liberdade é infinito. No entanto, para a solução dos problemas de vibração com precisão aceitável, em uma grande maioria dos casos, pode-se admitir um corpo desta natureza como parcialmente rígido, propondo um sistema dinamicamente equivalente com um número finito de graus de liberdade. (Thomson, 1978).

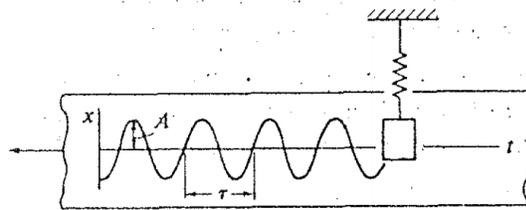
### 3.2 Movimento harmônico

Quando se repete regularmente em intervalos de tempos  $\tau$  idênticos, o movimento é denominado *movimento periódico* e  $\tau$  é denominado de período da oscilação e seu inverso denominado *frequência*, dada pela equação:

$$f = \frac{1}{\tau} \quad (3.1)$$

É possível exemplificar o movimento harmônico como uma massa suspensa através de uma mola, como indicado na Figura 2 abaixo:

FIGURA 2: REPRESENTAÇÃO DE UM MOVIMENTO HARMÔNICO



Fonte: Thomson, 1978.

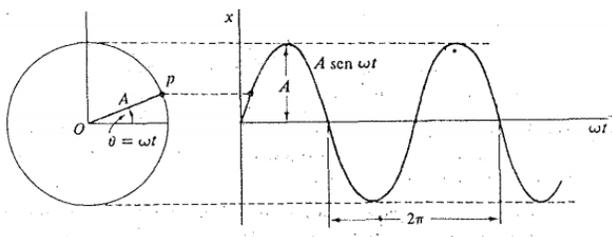
A posição da massa no sistema acima é determinada pela equação:

$$x = A \operatorname{sen} 2\pi \frac{t}{\tau}, \quad (3.2)$$

sendo “A” a amplitude de oscilação.

O deslocamento da massa do sistema massa-mola exemplificado acima também pode ser representado como a projeção sob uma linha reta de um ponto executando um movimento circular com velocidade angular  $\omega$ , como mostra a Figura 3:

FIGURA 3: MOVIMENTO HARMÔNICO REPRESENTADO POR UM PONTO QUE SE MOVE SOB UMA CIRCUNFERÊNCIA



Fonte: Thomson, 1978.

Denomina-se  $\omega$  a frequência angular de um movimento que se repete a cada  $2\pi$  num intervalo de tempo  $\tau$ , estabelecendo a seguinte relação:

$$\omega = \frac{2\pi}{\tau} = 2\pi f, \quad (3.3)$$

Aplicando a equação 3.3 em 3.2, têm-se:

$$x = A \text{ sen } \omega t \quad (3.4)$$

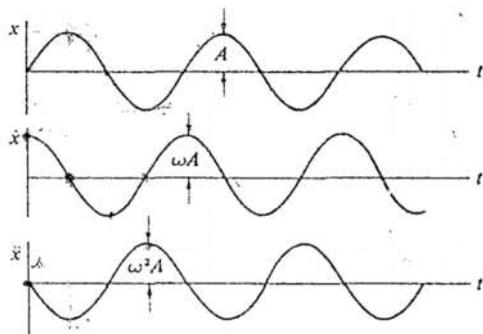
Realizando-se a diferenciação da equação 3.4 é possível obter a equação da velocidade e realizando-se novamente a diferenciação, obtém-se a aceleração:

$$\dot{x} = A \omega \cos \omega t = A \omega \text{ sen}(\omega t + \frac{\pi}{2}) \quad (3.5)$$

$$\ddot{x} = -A \omega^2 \text{ sen } \omega t = A \omega^2 \text{ sen}(\omega t + \pi) \quad (3.6)$$

As equações 3.4, 3.5 e 3.6, podem ser representadas graficamente como na Figura 4 abaixo:

FIGURA 4: DESLOCAMENTO, VELOCIDADE E ACELERAÇÃO



Fonte: Thomson, 1978.

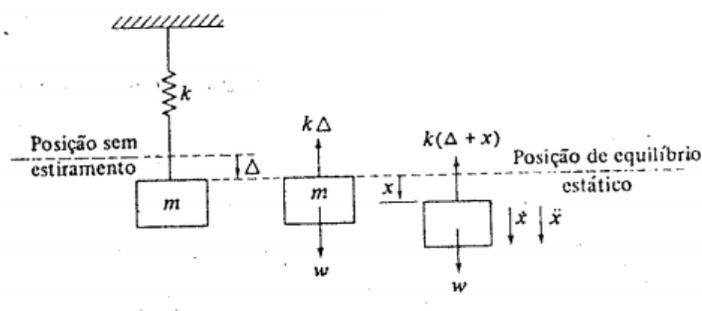
Observa-se, então, que no movimento harmônico a velocidade e a aceleração estão avançadas em relação ao deslocamento em  $\pi/2$  e  $\pi$ , respectivamente.

### 3.2.1 Vibração livre

Denomina-se *vibração livre* aquela que ocorre partir de uma perturbação inicial, um deslocamento inicial por exemplo, sem a ação de nenhuma força externa após essa perturbação inicial. (Rao, 2008).

Seja o sistema massa-mola como o proposto na Figura 5, sem mecanismo de dissipação de energia:

FIGURA 5: SISTEMA MASSA-MOLA E DIAGRAMA DE CORPO LIVRE



Fonte: Thomson, 1978.

Aplicando a segunda lei de Newton, tem-se:

$$m\ddot{x} = \sum F = w - k(\Delta + x). \quad (3.7)$$

Como pode se observar na Figura 5, a posição de equilíbrio estático ocorre na posição de deslocamento  $\Delta$ , onde a força da mola é dada por  $k\Delta$  e é igual ao peso  $w$ .

Assim, tem-se que:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (3.8)$$

o que nos permite também representar a equação do movimento como:

$$m\ddot{x} + kx = 0. \quad (3.9)$$

A equação (3.9) é uma equação diferencial linear de segunda ordem homogênea e sua solução geral é dada por:

$$x = C_1 \text{sen}(\omega_n t) + C_2 \text{cos}(\omega_n t), \quad (3.10)$$

onde  $\omega_n$  é a frequência angular natural dada por:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.11)$$

As constantes  $C_1$  e  $C_2$  da equação 3.10 são determinadas pelas condições iniciais de velocidade,  $\dot{x}(0)$ , e deslocamento,  $x(0)$ , aplicadas as equações 3.10 e 3.5:

$$C_1 = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n}, \quad (3.12)$$

$$C_2 = x(0). \quad (3.13)$$

Substituindo as equações 3.12 e 3.13 em 3.10, tem-se:

$$x = \frac{\dot{x}(0)}{\omega_n} \text{sen}(\omega_n t) + x(0) \cos(\omega_n t). \quad (3.14)$$

Neste sistema livre de ação de forças externas, o mesmo passa a oscilar em uma frequência denominada *frequência natural*. Esta frequência é uma propriedade do sistema e a partir da combinação das equações 3.3 e 3.11, pode ser calculada através da seguinte equação:

$$f_n = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}. \quad (3.15)$$

### 3.2.2 Vibração livre amortecida

Nos sistemas dinâmicos reais sempre há dissipação de energia que tende a reduzir as amplitudes das oscilações, o que é simulado através de forças que se opõem ao movimento, denominadas de *forças de amortecimento*. (Soriano, 2014).

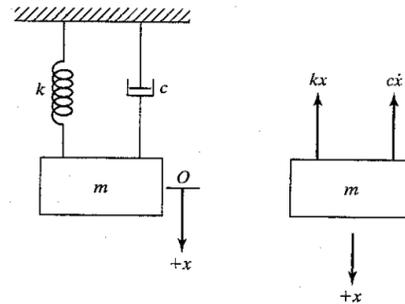
As forças de amortecimento não são de fácil descrição, porém existem alguns modelos propostos, sendo o *amortecimento viscoso* o mais utilizado em engenharia.

Neste modelo, a força é dada pelo produto da velocidade de deslocamento por uma constante de proporcionalidade, representada pela equação:

$$F_d = c \dot{x}. \quad (3.16)$$

Se introduz no sistema da Figura 5 a força de amortecimento viscoso:

FIGURA 6: SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO E DIAGRAMA DE CORPO LIVRE



Fonte: Rao, 2008.

Observa-se na Figura 6 que para a análise de vibração livre amortecida é necessário incluir à equação 3.9 o termo referente a força de amortecimento, ou seja:

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \quad (3.17)$$

A equação 3.17 é uma equação diferencial homogênea cuja solução é da forma:

$$x = e^{st}. \quad (3.18)$$

Substituindo 3.18 em 3.17, vem:

$$(ms^2 + cs + k)e^{st} = 0. \quad (3.19)$$

A equação acima é satisfeita para qualquer valor de  $t$ , quando

$$s^2 + \frac{c}{m}s + \frac{k}{m} = 0. \quad (3.20)$$

Determinando as raízes da equação 3.20 tem-se:

$$s_{1,2} = -\frac{c}{2m} \pm \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}, \quad (3.21)$$

e a solução é dada por:

$$x = e^{\left(-\frac{c}{2m}\right)t} \left( A e^{\left(\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} + B e^{\left(-\sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\right)t} \right). \quad (3.22)$$

Assim, como feito anteriormente, para a vibração livre não amortecida, as condições iniciais de velocidade,  $\dot{x}(0)$ , e deslocamento,  $x(0)$ , determinam os valores das constantes  $A$  e  $B$  na equação 3.22.

Convém avaliar preliminarmente o comportamento do movimento dado pela equação 3.22. O primeiro termo  $e^{(-\frac{c}{2m})t}$  é uma função exponencial declinante em função do tempo.

Os termos dentro dos parênteses dependem do valor do radicando, se é igual a zero, positivo ou negativo.

Se o radicando  $(\frac{c}{2m})^2 - \frac{k}{m}$  é igual a zero, denomina-se que o amortecimento é crítico, pois é o valor limite do coeficiente de amortecimento viscoso que separa o estado oscilatório do não oscilatório, ou melhor,

$$c_c = 2\sqrt{km} = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n. \quad (3.23)$$

Caso o radicando em questão seja maior do que zero, os expoentes da equação são números reais e não há oscilação possível. Denomina-se este caso como *superamortecido*.

No caso oposto, onde o radicando é menor do que zero, os expoentes tornam-se números imaginários e os termos entre parentes da equação 3.22 tornam-se oscilatórios. Assim, o sistema oscila, retornando gradualmente a posição neutra, denominando este caso como *subamortecido*.

Para as futuras análises é conveniente expressar o amortecimento  $c$ , comparando-o com o amortecimento crítico,  $c_c$ , através do que é denominado *fração de amortecimento*, isto é:

$$\xi = \frac{c}{c_c}, \quad (3.24)$$

onde a seguinte relação se torna válida:

$$\frac{c}{2m} = \xi \frac{c_c}{2m} = \xi \omega_n. \quad (3.25)$$

A relação apresentada pela equação 3.25 permite expressar as raízes da equação 3.21 de uma forma mais simplificada, agora em termos de  $\xi$ .

Desta forma, escreve-se:

$$s_{1,2} = (-\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n. \quad (3.26)$$

A partir de então os três casos de amortecimento podem ser analisados verificando se  $\xi$  é menor, igual ou maior que unidade.

No caso de a fração de amortecimento ser menor do que 1, tem-se o caso de subamortecimento e a solução geral da equação 3.22 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left( A e^{i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} + B e^{-i\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t} \right). \quad (3.27)$$

A equação acima também pode ser escrita de duas formas:

$$x = X e^{-\xi\omega_n t} \text{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t + \phi), \quad (3.28)$$

$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left( C_1 \text{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t) + C_2 \text{cos}(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t) \right). \quad (3.29)$$

Aplicando as condições iniciais de velocidade,  $\dot{x}(0)$ , e deslocamento,  $x(0)$  nas equações acima, permitem determinar as constantes  $C_1, C_2, X$  e  $\phi$ . Assim a solução geral em função das condições iniciais para o amortecimento subcrítico é:

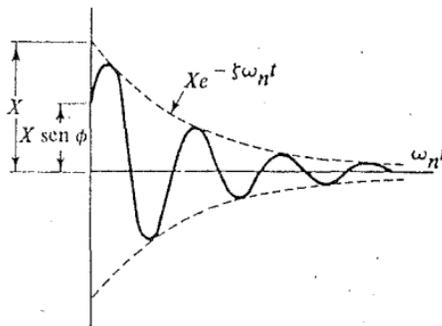
$$x = e^{-\xi\omega_n t} \left( \frac{\dot{x}(0) + \xi\omega_n x(0)}{\omega_n \sqrt{1-\xi^2}} \text{sen}(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t) + x(0) \text{cos}(\sqrt{1-\xi^2}\omega_n t) \right). \quad (3.30)$$

A frequência de oscilação é, então:

$$\omega_d = \frac{2\pi}{\tau_d} = \omega_n \sqrt{1-\xi^2}. \quad (3.31)$$

Este tipo de movimento pode ser representado na Figura 7:

FIGURA 7: OSCILAÇÃO COM AMORTECIMENTO SUBCRÍTICO



Fonte: Thomson, 1978.

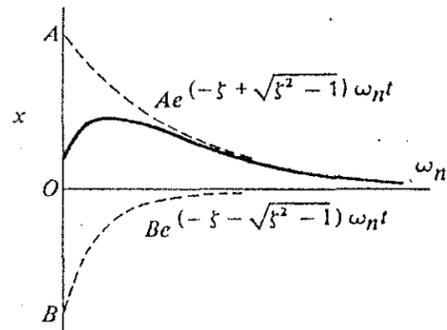
No caso de um movimento superamortecido, ou seja  $\xi > 1$ , as raízes expressas na equação 3.26 são reais e as constantes  $A$  e  $B$  são expressas através das condições iniciais de deslocamento e velocidade:

$$A = \frac{\dot{x}(0) + (\xi + \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x(0)}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}, \quad (3.32)$$

$$B = \frac{-\dot{x}(0) - (\xi - \sqrt{\xi^2 - 1})\omega_n x(0)}{2\omega_n \sqrt{\xi^2 - 1}}. \quad (3.33)$$

Como pode se observar na Figura 8, o movimento é uma função de tempo exponencialmente decrescente e denominado *aperiódico*:

FIGURA 8: OSCILAÇÃO COM SUPERAMORTECIMENTO



Fonte: Thomson, 1978.

No caso do amortecimento crítico, onde  $\xi = 1$ , a raiz da equação 3.26 é dupla:

$$s_1 = s_2 = -\omega_n, \quad (3.34)$$

e a equação 3.22 pode ser simplificada a:

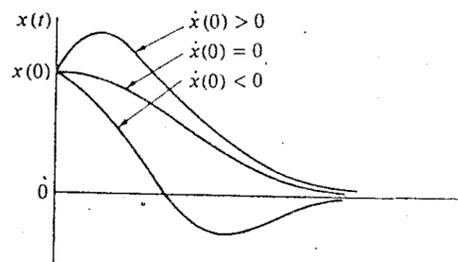
$$x = C e^{-\omega_n t}. \quad (3.35)$$

A solução da equação acima pode ser encontrada tendendo  $\xi$  à 1 na equação 3.30 e então:

$$x = e^{-\omega_n t} \{ [\dot{x}(0) + \omega_n x(0)] t + x(0) \}. \quad (3.36)$$

A equação 3.36 acima pode ser representada graficamente como vê-se na Figura 9:

FIGURA 9: OSCILAÇÃO COM SUPERAMORTECIMENTO



Fonte: Thomson, 1978.

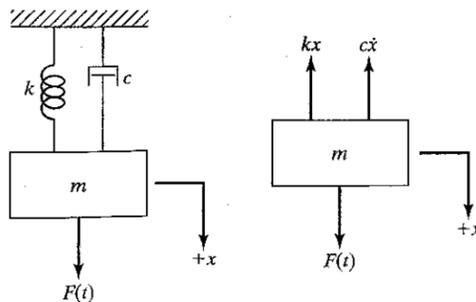
Como pode se observar na Figura 9, três tipos de respostas podem ser encontrados em termos da velocidade inicial.

### 3.2.3 Movimento excitado harmonicamente

Segundo Rao (2008), diz-se que um sistema mecânico ou estrutural sofre vibração forçada sempre que energia externa é fornecida ao sistema durante vibração.

A energia externa pode ser fornecida ao sistema por meio de uma força aplicada ou por uma excitação de deslocamento imposta.

FIGURA 10: SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECIDO E DIAGRAMA DE CORPO LIVRE



Fonte: Rao, 2008.

Considerando um sistema massa-mola com amortecimento viscoso como apresentado na Figura 10 acima, é possível deduzir a seguinte equação a partir da análise do diagrama de corpo livre:

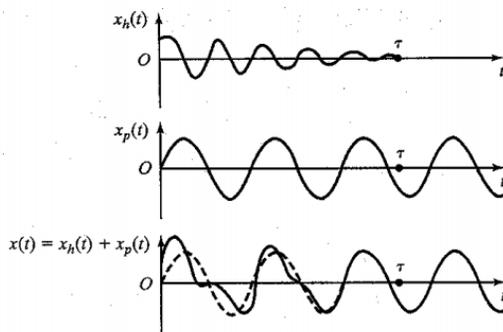
$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F(t). \quad (3.37)$$

A solução geral desta equação não homogênea,  $x(t)$ , é constituída pela soma da solução homogênea,  $x_h(t)$ , com a solução complementar,  $x_p(t)$ .

A solução homogênea é a solução da equação homogênea onde  $F(t) = 0$  e já foi apresentada anteriormente para as três possíveis condições de amortecimento.

A solução complementar depende do tipo de força que irá excitar o sistema. Porém, como pode se observar na Figura 11, a solução homogênea desaparece após um determinado intervalo de tempo e a solução geral torna-se igual a solução complementar. O movimento é classificado como *transitório* até o desaparecimento da parcela da solução devido a vibração livre.

FIGURA 11: SOLUÇÕES HOMOGÊNEA, COMPLEMENTAR E GERAL DE UM CASO DE EXCITAÇÃO HARMÔNICA



Fonte: Rao, 2008.

Se a força excitante  $F(t)$  indicada na Figura 10 for dada por  $F(t) = F_0 \cos \omega t$ , então tem-se que a solução complementar da equação 3.37 é:

$$x_p(t) = X \cos(\omega t - \phi). \quad (3.38)$$

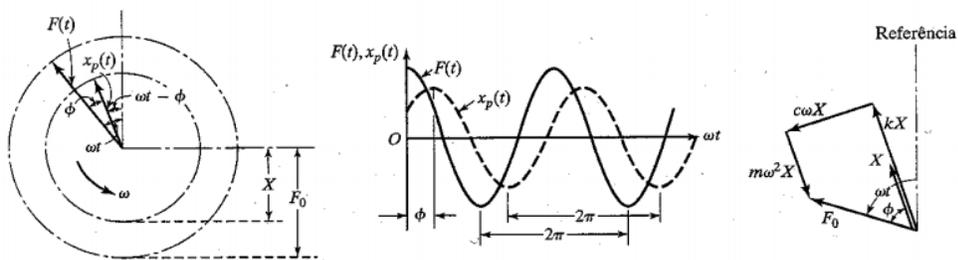
Substituindo a equação 3.38 em 3.37 e aplicando algumas relações trigonométricas, é possível determinar que:

$$X = \frac{F_0}{\sqrt{(k-m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}, \quad (3.39)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{c\omega}{k-m\omega^2} \right). \quad (3.40)$$

A Figura 12 exibe os gráficos da função da força excitante e da resposta em regime permanente, bem como o diagrama vetorial das forças:

FIGURA 12: REPRESENTAÇÕES DAS FUNÇÕES FORÇANTE E RESPOSTA



Fonte: Rao, 2008.

As equações 3.39 e 3.40 podem ser simplificadas e representadas de forma adimensional.

Se o numerador e denominador de ambas equações forem divididos pela constante elástica da mola,  $k$ , tem-se que:

$$X = \frac{\frac{F_0}{k}}{\sqrt{\left(1 - \frac{m\omega^2}{k}\right)^2 + \left(\frac{c\omega}{k}\right)^2}}, \quad (3.41)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{\frac{c\omega}{k}}{1 - \frac{m\omega^2}{k}} \right). \quad (3.42)$$

Se define ainda que a deflexão devido a força estática  $F_0$  como  $\delta_{st}$  e a razão das frequências de excitação e frequência natural como  $r$ , tem-se:

$$\delta_{st} = \frac{F_0}{k}, \quad (3.43)$$

$$r = \frac{\omega}{\omega_n}. \quad (3.44)$$

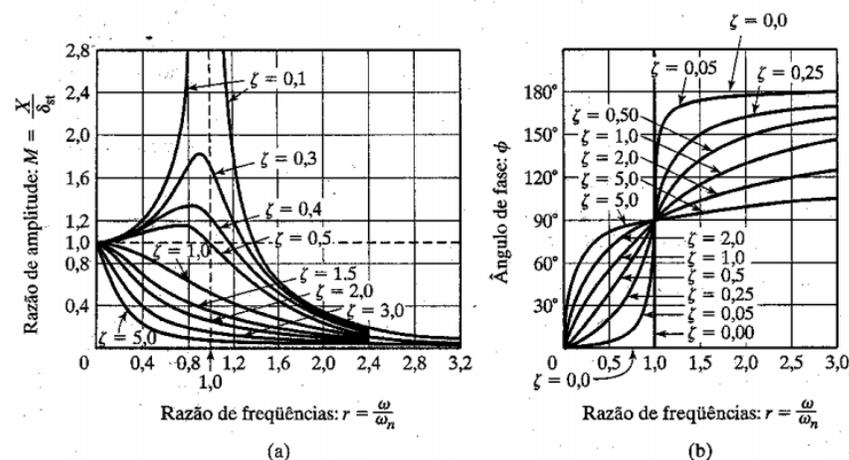
Aplicando estas expressões 3.43 e 3.44 juntamente com as equações 3.11, 3.23, e 3.24, as equações 3.41 e 3.42 podem ser expressas de forma adimensional como a seguir:

$$M = \frac{X}{\delta_{st}} = \frac{1}{\sqrt{(1-r^2)^2 + (2r\xi)^2}}, \quad (3.45)$$

$$\phi = \tan^{-1} \left( \frac{2r\xi}{1-r^2} \right). \quad (3.46)$$

As equações 3.45 e 3.46 podem ser representadas graficamente como apresentado na Figura 13:

FIGURA 13: GRÁFICO RELATIVO AS EQUAÇÕES 3.45 E 3.46



Na Figura 13 observa-se que quando a razão de frequência tende ao infinito e a razão de amplitude tende a zero. Para pequenos valores de  $r$ , as forças de amortecimento e inércia são pequenas, ou seja, a força resultante é aproximadamente a força da mola, o que resulta num pequeno ângulo de fase.

Para uma razão de frequência igual a um, ou seja, frequência de excitação igual a frequência natural do sistema, obtém-se os maiores valores de amplitude, inclusive superiores ao deslocamento numa condição estática. Esta amplitude tende a aumentar ainda com a redução do coeficiente de amortecimento.

### **3.3 Sistemas de muitos graus de liberdade**

Grande parte dos problemas encontrados em engenharia são derivados da análise de sistemas contínuos que possuem infinitos graus de liberdade. A solução de tais problemas envolve obter soluções para diversas equações diferenciais parciais, o que nem sempre é uma tarefa fácil e na grande maioria dos casos, estas equações não possuem solução analítica. Por esta razão, busca-se a aproximação deste sistema contínuo a um sistema com muitos graus de liberdade onde pode-se resolver numericamente um conjunto de equações diferenciais ordinárias cujas soluções são mais simples.

Neste caso então há uma equação de movimento para cada grau de liberdade, sendo que estas equações de movimento podem ser obtidas tanto pela segunda lei de Newton ou usando as equações de Lagrange.

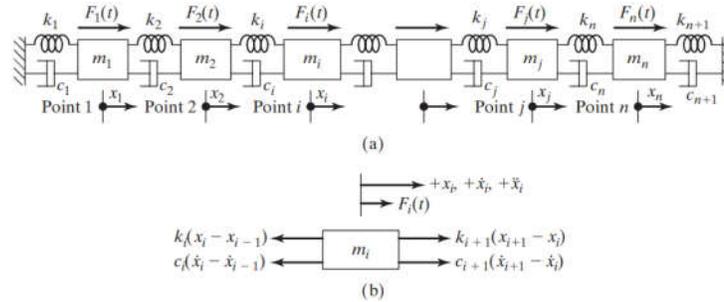
Para um sistema com “ $n$ ” graus de liberdade, há, também, “ $n$ ” frequências naturais.

O método mais simples de aproximação de um sistema contínuo a um sistema com vários graus de liberdade envolve substituir a massa ou inércia distribuída do sistema por um número finito de massas concentradas ou corpos rígidos (Rao, 2008).

Ainda, segundo Rao (2008), entende-se que as massas estejam ligadas por elementos elásticos e amortecedores desprovidos de massa. Considera-se um número mínimo de coordenadas necessárias para descrever o movimento das massas concentradas e, naturalmente, quanto maior o número de massas concentradas adotadas para o modelo, mais preciso será o resultado.

Considera-se um sistema de “n” massas ligadas por molas e amortecedores como o da Figura 14:

FIGURA 14: SISTEMA MASSA-MOLA AMORTECEDOR COM VÁRIOS GRAUS DE LIBERDADE



Fonte: Rao, 2008.

Aplicando a segunda Lei de Newton na massa  $m_i$  da Figura 14, tem-se:

$$m_i \ddot{x}_i = -k_i(x_i - x_{i-1}) + k_{i+1}(x_{i+1} - x_i) - c_i(\dot{x}_i - \dot{x}_{i-1}) + c_{i+1}(\dot{x}_{i+1} - \dot{x}_i) + F_i, \quad (3.47)$$

$$i = 2, 3, \dots, n - 1.$$

A equação 3.47 pode ser reescrita da seguinte forma se for adotado  $i = n$  e  $x_{n+1} = 0$ :

$$m_n \ddot{x}_n - c_n \dot{x}_{n-1} + (c_n + c_{n+1}) \dot{x}_n - k_n x_{n-1} + (k_n + k_{n+1}) x_n = F_n, \quad (3.48)$$

$$i = 1, 2, \dots, n.$$

Desta forma, as equações podem ser representadas na forma matricial apresentado na equação 3.49:

$$[m] \ddot{\vec{x}} + [c] \dot{\vec{x}} + [k] \vec{x} = \vec{F}, \quad (3.49)$$

onde  $[m]$ ,  $[c]$  e  $[k]$  são as matrizes de massa, amortecimento e rigidez respectivamente representadas pelas equações 3.50, 3.51 e 3.52:

$$[k] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & m_n \end{bmatrix}, \quad (3.50)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} (c_1 + c_2) & -c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -c_2 & (c_2 + c_3) & -c_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -c_3 & (c_3 + c_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -c_n & (c_n + c_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

e

$$[k] = \begin{bmatrix} (k_1 + k_2) & -k_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3) & -k_3 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -k_3 & (k_3 + k_4) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -k_n & (k_n + k_{n+1}) \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Sejam  $\vec{\ddot{x}}$ ,  $\vec{\dot{x}}$ ,  $\vec{x}$  e  $\vec{F}$  os vetores de aceleração, velocidade, deslocamento e força respectivamente, representados pelas equações 3.53, 3.54, 3.55 e 3.56:

$$\vec{x} = \begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.53)$$

$$\vec{\dot{x}} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.54)$$

$$\vec{\ddot{x}} = \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1(t) \\ \ddot{x}_2(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_n(t) \end{Bmatrix}, \quad (3.55)$$

$$\vec{F} = \begin{Bmatrix} F_1(t) \\ F_2(t) \\ \vdots \\ F_n(t) \end{Bmatrix}. \quad (3.56)$$

O caso apresentado acima é um caso particular, pois na sua forma mais geral as matrizes de massa, amortecimento e rigidez são dados por:

$$[m] = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} & \cdots & m_{1n} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} & \cdots & m_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \cdot & & & & \\ m_{1n} & m_{2n} & m_{3n} & \cdots & m_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.57)$$

$$[c] = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \dots & c_{1n} \\ c_{12} & c_{22} & c_{23} & \dots & c_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \cdot & & & & \\ c_{1n} & c_{2n} & c_{3n} & \dots & c_{nn} \end{bmatrix}, \quad (3.58)$$

$$[k] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \dots & k_{1n} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & \dots & k_{2n} \\ \vdots & & & & \\ \cdot & & & & \\ k_{1n} & k_{2n} & k_{3n} & \dots & k_{nn} \end{bmatrix}. \quad (3.59)$$

A análise das matrizes de massa e rigidez permitem a classificação do acoplamento do sistema. Caso a matriz de massa possua no mínimo um termo não nulo fora da diagonal, diz-se que o sistema é *dinamicamente acoplado*. Se a matriz de rigidez possuir um termo diferente de zero fora da diagonal, denomina-se que o sistema é *estaticamente acoplado*.

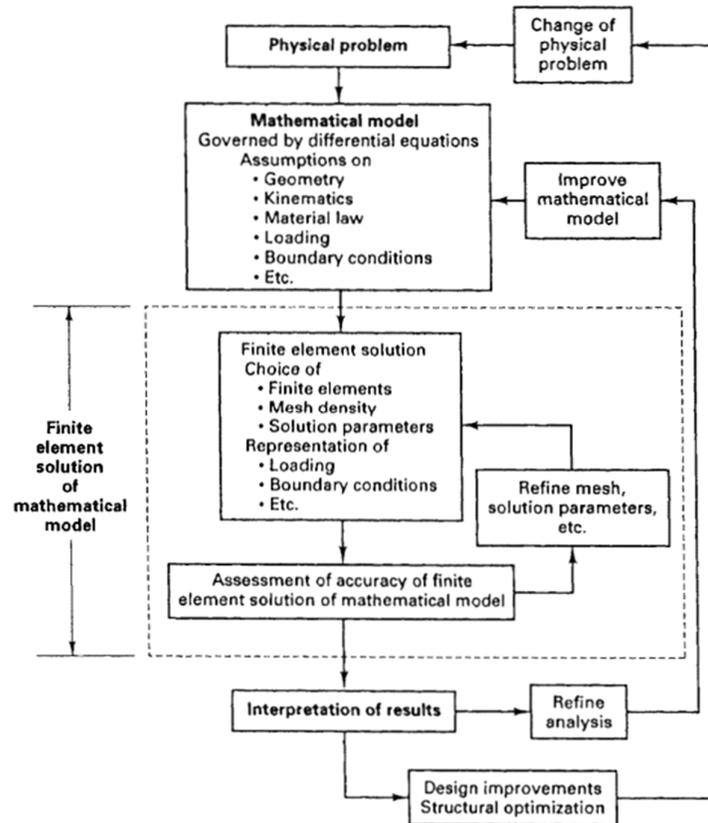
### 3.4 Método dos elementos finitos

Como exposto no tópico anterior, um modelo contínuo tem equações diferenciais de movimento com funções contínuas em função da posição e em função do tempo, equações estas que só admitem resolução analítica em casos muito simples. Já um modelo discreto, é baseado na configuração geométrica especificada por um número finito de parâmetros independentes entre si, que tem equações diferenciais apenas na variável temporal, o que facilita a resolução numérica. (Soriano, 2014).

Neste contexto, o método dos elementos finitos tem sido amplamente utilizado para resolução de problemas de engenharia. Conforme enunciado por Bathe (2014), a idealização do problema físico em um modelo matemático requer certas suposições que, juntas, levam a equações diferenciais que governam o modelo matemático. A análise de elementos finitos resolve esse modelo matemático. Como a técnica de solução de elementos finitos é um procedimento numérico, é necessário avaliar a precisão da solução. Se os critérios de precisão não forem atendidos, a solução numérica deve ser repetida com parâmetros de solução refinados até que uma precisão suficiente seja alcançada.

Na Figura 15 é representado um fluxograma de um processo para resolução de um problema utilizando método dos elementos finitos:

FIGURA 15: PROCESSO DE ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS



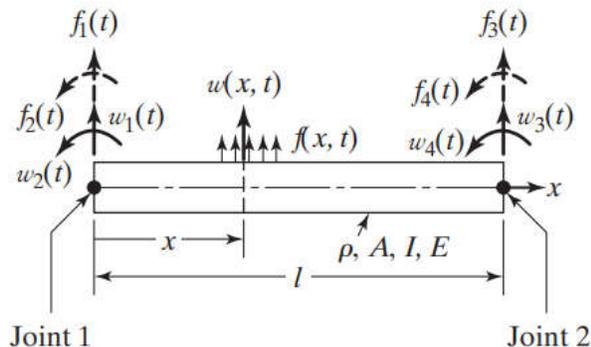
Fonte: Bathe, 2014.

Para os casos de estruturas formadas por barras lineares, intuitivamente realiza-se uma definição dos pontos nodais nas extremidades das barras. No entanto, no caso de uma viga por exemplo, em se tratando da discretização de um modelo contínuo, não há definição de um procedimento geral para determinação dos pontos nodais e dos elementos finitos. Assim a discretização deve ser aumentada o quanto for necessária para reduzir os erros a um nível aceitável, de modo que a solução numérica se aproxime da solução analítica do modelo contínuo.

### 3.5 Matriz de Massa e Rigidez para um Elemento de Viga

Seja um elemento de viga de acordo com a teoria de Euler-Bernoulli, como representado na Figura 16:

FIGURA 16: ELEMENTO DE VIGA UNIFORME



Fonte: Rao, 2008.

Neste elemento de viga, cada ponto nodal (1 e 2), possuem dois graus de liberdade sendo, então, sujeitas a deslocamentos de translação  $w_1(t)$  e  $w_3(t)$  referentes as forças  $f_1(t)$  e  $f_3(t)$  e deslocamentos de rotacionais,  $w_2(t)$  e  $w_4(t)$  referentes aos momentos fletores  $f_2(t)$  e  $f_4(t)$ , respectivamente.

Assim como a deflexão estática de uma viga, o deslocamento transversal dentro do elemento é considerado como uma equação cúbica em  $x$ , representado por:

$$w(x, t) = a(t) + b(t)x + c(t)x^2 + d(t)x^3. \quad (3.60)$$

As condições de contorno nas extremidades do elemento são:

$$\begin{aligned} w(0, t) &= w_1(t), \\ w(l, t) &= w_3(t), \\ \frac{\partial w}{\partial x}(0, t) &= w_2(t), \\ \frac{\partial w}{\partial x}(l, t) &= w_4(t). \end{aligned} \quad (3.61)$$

Aplicando estas condições de contorno a equação 3.61, tem-se:

$$\begin{aligned} a(t) &= w_1(t), \\ b(t) &= w_2(t), \\ c(t) &= \frac{1}{l^2} [-3 w_1(t) - 2 w_2(t)l + 3 w_3(t) - w_4(t)l], \\ d(t) &= \frac{1}{l^3} [2 w_1(t) + 2 w_2(t)l + 2 w_3(t) + w_4(t)l]. \end{aligned} \quad (3.62)$$

Substituindo as equações 3.62 em 3.60, o deslocamento transversal pode ser reescrito da seguinte forma:

$$w(x, t) = \left(1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}\right) w_1(t) + \left(\frac{x}{l} - 2 \frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) l w_2(t) + \left(3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}\right) w_3(t) + \left(-\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right) l w_4(t). \quad (3.63)$$

A equação 3.63 pode ser reescrita da seguinte forma:

$$w(x, t) = \sum_{i=1}^4 N_i(x) w_i(t), \quad (3.64)$$

onde,  $N_i(x)$  são *funções de forma* dadas por:

$$\begin{aligned} N_1(x) &= 1 - 3 \frac{x^2}{l^2} + 2 \frac{x^3}{l^3}, \\ N_2(x) &= x - 2l \left(\frac{x}{l}\right)^2 + l \left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ N_3(x) &= 3 \left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2 \left(\frac{x}{l}\right)^3, \\ N_4(x) &= -l \left(\frac{x}{l}\right)^2 + l \left(\frac{x}{l}\right)^3. \end{aligned} \quad (3.65)$$

A energia cinética, energia de deformação de flexão e trabalho virtual do elemento podem ser expressas como:

$$T(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho A \left\{ \frac{\partial w(x,t)}{\partial x} \right\}^2 dx \equiv \frac{1}{2} \dot{\vec{w}}(t)^T [m] \dot{\vec{w}}(t), \quad (3.66)$$

$$V(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left\{ \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right\}^2 dx \equiv \frac{1}{2} \dot{\vec{w}}(t)^T [k] \dot{\vec{w}}(t), \quad (3.67)$$

$$\delta W(t) = \int_0^l f(x, t) \delta w(x, t) dx \equiv \delta \vec{w}(t)^T \vec{f}(t), \quad (3.68)$$

onde  $\rho$ ,  $E$ ,  $I$  e  $A$  são, respectivamente a densidade, módulo de Young, momento de inércia e área de secção transversal do elemento. Substituindo então a equação 3.63 nas equações 3.66 a 3.68 e realizando a integração necessária é possível obter as matrizes de massa, rigidez do elemento:

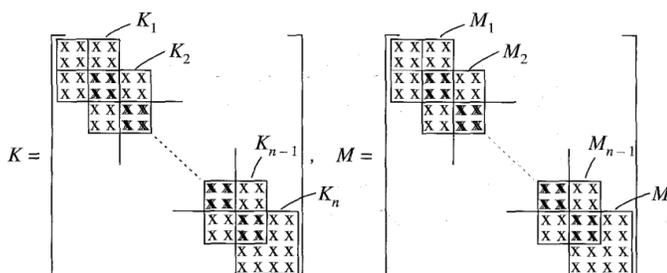
$$[m] = \frac{\rho A l}{420} \begin{bmatrix} 156 & 22l & 54 & -13l \\ 22l & 4l^2 & 13l & -3l^2 \\ 54 & 13l & 156 & -22l \\ -13l & -3l^2 & -22l & 4l^2 \end{bmatrix}, \quad (3.69)$$

$$[k] = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & -2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ -6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

### 3.6 Matrizes de Massa e Rigidez Globais

Após a determinação das matrizes de massa e rigidez dos elementos, pode-se então montar a matriz de massa e rigidez globais para uma viga. A Figura 17 traz uma representação da matriz global montada a partir das matrizes de massa e rigidez para  $n$  elementos:

FIGURA 17: REPRESENTAÇÃO DA MONTAGEM DAS MATRIZES DE MASSA E RIGIDEZ A PARTIR DAS MATRIZES DOS ELEMENTOS



Fonte: Meirovitch, 2001.

Observa-se que uma viga discretizada com  $n$  elementos, possui  $n+1$  pontos nodais e as matrizes de massa e rigidez globais são matrizes  $2n \times 2n$ , ou seja,  $2n$  linhas e  $2n$  colunas.

### 3.7 Determinação das Frequências Naturais

Para a determinação das frequências naturais do sistema, considera-se o sistema em vibração livre de modo que a equação de movimento seja:

$$[M]\ddot{\vec{x}} + [K]\vec{x} = \vec{0}. \quad (3.71)$$

A equação 3.71 pode ser solucionada admitindo uma solução da forma:

$$x_i(t) = X_i T(t), \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n, \quad (3.72)$$

sendo  $X_i$  uma constante e  $T$  em função do tempo. Substituindo a equação 3.72 em 3.71, temos:

$$[M]\vec{X}\ddot{T}(t) + [K]\vec{X}T(t) = \vec{0}. \quad (3.73)$$

A equação 3.73 pode ser reescrita em forma escalar, separando em  $n$  equações:

$$-\frac{\ddot{T}(t)}{T(t)} = \frac{(\sum_{j=1}^n k_{ij} X_j)}{(\sum_{j=1}^n m_{ij} X_j)}, \text{ onde } i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.74)$$

Do lado esquerdo da equação 3.74 os termos são independentes do índice  $i$  e do lado direito são independentes de  $t$  e, assim, ambos devem ser iguais a uma constante.

Denominando esta constante como  $\omega^2$ , reescreve-se:

$$[K] - \omega^2[M]\vec{X} = \vec{0}. \quad (3.75)$$

A solução trivial da equação acima é  $X_1 = X_2 = \dots = X_n = 0$ .

Para uma solução não trivial, o determinante da matriz de coeficiente deve ser zero, ou seja:

$$|[K] - \omega^2[M]| = 0 \quad (3.76)$$

Neste ponto, tem-se um problema de autovalor dado pela equação 3.75, onde a equação 3.76 é a equação característica,  $\omega^2$  é o valor característico e  $\omega$  é a *frequência natural do sistema*.

A equação 3.76 pode ser expandida em uma equação polinomial de  $n$ -ésima ordem. As soluções (raízes) desta equação serão  $n$  valores  $\omega^2$ .

Se  $[M]$  e  $[K]$  são matrizes simétricas e positivas, as soluções  $\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2$  são reais e positivas.

Assim, para um sistema de  $N$  graus de liberdade tem-se matrizes de massa e rigidez de ordem  $N \times N$  e, conseqüentemente,  $N$  frequências naturais a serem determinadas.

Como demonstrado por Rao (2008), as frequências naturais para uma viga podem ser determinadas analiticamente pela seguinte equação:

$$\omega_n = (\beta_n L)^2 \sqrt{\frac{EI}{\rho AL^4}}, \quad (3.77)$$

onde o produto  $\beta_n L$  é definido em função das condições de contorno da viga.

Para o caso de uma viga bi-engastada como do modelo adotado a seguir, tem-se:

$$\beta_1 L = 4,730041,$$

$$\beta_2 L = 7,853205,$$

$$\beta_3 L = 10,995608.$$

Atualmente a NBR 6118:2014 traz um capítulo específico para tratar do estado limite de vibrações excessivas. Neste item, recomenda-se que a frequência natural da estrutura seja afastada de 1,2 vezes da frequência denominada crítica. A frequência crítica pode ser determinada experimentalmente, porém na ausência destes valores, pode-se adotar os valores apresentados no Quadro 1:

QUADRO 1: FREQUÊNCIAS CRÍTICAS E NATURAIS MÍNIMAS SEGUNDO A NBR 6118:2014

<b>Caso</b>	<b>Frequência Crítica (Hz)</b>	<b>Frequência Natural Mínima (Hz)</b>
Ginásio de esportes e academias de ginástica	8,0	9,6
Salas de dança ou de concerto sem cadeiras fixas	7,0	8,4
Passarelas de pedestres ou ciclistas	4,5	5,4
Escritórios	4,0	4,8
Salas de concerto com cadeiras fixas	3,5	4,2

Fonte: NBR 6118, 2014.

### 3.8 Matriz de Amortecimento Global

O amortecimento deve ser levado em consideração principalmente nos casos em que a resposta do sistema é obtida por um período de tempo relativamente longo se comparado com os períodos naturais do sistema, ou ainda, se a frequência de excitação estiver próxima a uma frequência natural. No entanto, como não é possível se prever antecipadamente os efeitos, deve-se levar em consideração a presença do amortecimento em qualquer sistema.

Neste contexto é conveniente introduzir função  $R$ , conhecida como função dissipativa de Rayleigh, apresentado por Rao (2011, p. 611):

$$R = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{x}}^T [c] \dot{\mathbf{x}} , \quad (3.78)$$

Ainda segundo Rao (2011), por simplicidade, pode-se considerar um sistema especial em que a matriz de amortecimento é escrita como uma combinação linear das matrizes de massa e rigidez:

$$[C] = \alpha[M] + \beta[K]. \quad (3.79)$$

Este tipo de amortecimento é denominado Amortecimento Proporcional, onde  $\alpha$  e  $\beta$  são constantes a serem determinadas a partir de duas razões de amortecimento que correspondem a duas frequências desiguais de vibração.

Uma vez estabelecidas as razões de amortecimento de dois modos naturais de vibração,  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , respectivamente para o  $i$ -ésimo e para o  $j$ -ésimo modos de vibração, permite-se escrever  $\alpha$  e  $\beta$  pelas seguintes expressões:

$$\alpha = 2 \frac{\omega_i^2 \omega_j \xi_j - \omega_i \omega_j^2 \xi_i}{\omega_i^2 - \omega_j^2}, \quad (3.80)$$

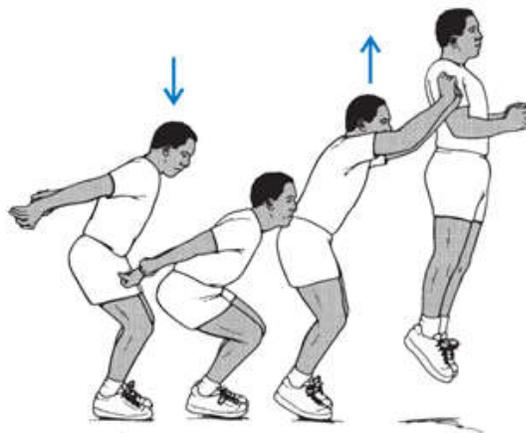
$$\beta = 2 \frac{\omega_i \xi_i - \omega_j \xi_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2}. \quad (3.81)$$

Segundo Bathe (2014), na análise real, pode ser que as taxas de amortecimento sejam conhecidas para mais do que duas frequências. Nesse caso, dois valores médios, são usados para se obter  $\alpha$  e  $\beta$ .

### 3.9 Modelo de carregamento dinâmico

A caracterização de um movimento realizado por espectadores num estádio pode ser aproximada pelo movimento realizado durante um salto de movimento vertical, como exemplificado na Figura 18 abaixo:

FIGURA 18: MOVIMENTO DO CORPO DURANTE O SALTO



Fonte: Hamill et al, 2015.

Assim, observa-se que o salto é realizado em etapas tais como a impulsão e a suspensão, onde ocorre perda de contato com o solo, e a aterrisagem. A partir de

análises experimentais deste movimento, Ellis et al (2000) propõem um modelo matemático do carregamento dinâmico utilizando a série de Fourier como indicado na equação 3.82:

$$F(t) = F_0[1 + \sum_{n=1}^N \alpha_n \text{sen}(2\pi fnt + \phi_n)], \quad (3.82)$$

onde  $F_0$  é a carga estática em N,  $\alpha_n$  é o coeficiente de Fourier para  $n$  harmônicos,  $f$  é a frequência em Hz e  $\phi_n$  é o ângulo relativo de fase e  $N$  o número total de harmônicos.

QUADRO 2: COEFICIENTES DE FOURIER PARA DIFERENTES TIPOS DE SALTO

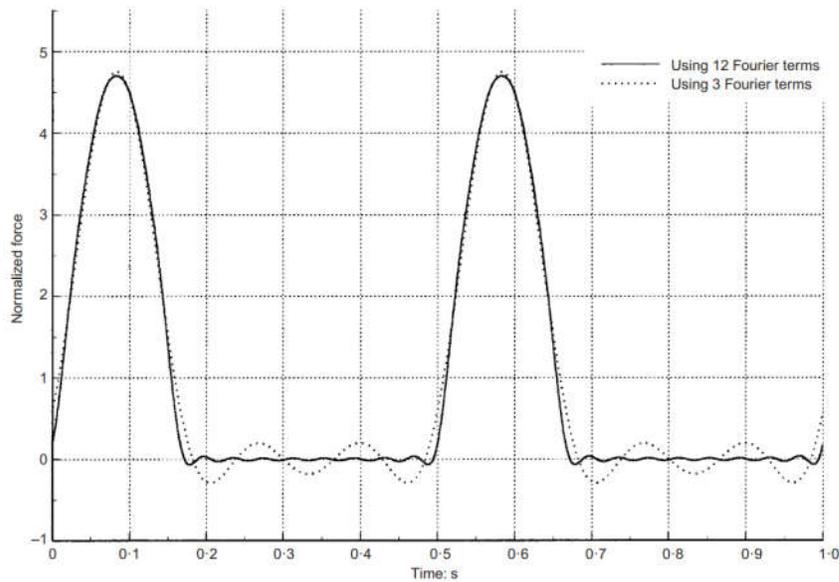
Atividades	Coeficientes	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
Aeróbico de baixo impacto	$\alpha_n$	$\frac{9}{7}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{9}{247}$	$\frac{9}{391}$	$\frac{2}{63}$
	$\phi_n$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$
Exercícios rítmicos e aeróbicos de alto impacto	$\alpha_n$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{2}{15}$	0	$\frac{2}{35}$
	$\phi_n$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$	0	$-\frac{\pi}{2}$
Salto normal	$\alpha_n$	$\frac{9}{5}$	$\frac{9}{7}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{9}{55}$	$\frac{9}{91}$	$\frac{9}{15}$
	$\phi_n$	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{2}$

Fonte: Ellis et al, 2000.

A partir do Quadro 2 é possível plotar um gráfico para exemplificar a força em função do tempo dada pela equação 3.82.

Neste caso, está sendo considerado um salto normal a 2 Hz, com uma força normalizada ( $F_0 = 1$ ). Têm-se, portanto:

FIGURA 19: CARREGAMENTO DINÂMICO DE UM SALTO NORMAL



Fonte: Ellis et al, 2000.

Como pode ser observado na Figura 19, o pico do carregamento é cerca de 4,8 vezes o peso estático. Pode-se observar que os termos Fourier mais altos ( $n > 3$ ) não afetam significativamente os valores mais altos, no entanto, podem afetar a resposta estrutural dependendo da razão entre a frequência de carga e a frequência estrutural (Ellis e Ji, 2000).

Bachmann *et al.* (1995) apresenta, como uma possível faixa de frequência para o ato de saltar de forma rítmica, a frequência de 1,8 a 3,4 Hz. As frequências para as demais atividades são apresentadas na Quadro 3:

QUADRO 3: TIPOS DE ATIVIDADES E SUA APLICABILIDADE A DIFERENTES ATIVIDADES REAIS E TIPOS DE ESTRUTURAS

Representative types of activity			Range of applicability		
Designation	Definition	Design activity rate [Hz]	Actual activities	Activity rate [Hz]	Structure type
“walking”	walking with continuous ground contact	1.6 to 2.4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• slow walking (ambling)</li> <li>• normal walking</li> <li>• fast, brisk walking</li> </ul>	~ 1.7 ~ 2.0 ~ 2.3	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pedestrian structures (pedestrian bridges, stairs, piers, etc.)</li> <li>• office buildings, etc.</li> </ul>
“running”	running with discontinuous ground contact	2.0 to 3.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• slow running (jog)</li> <li>• normal running</li> <li>• fast running (sprint)</li> </ul>	~ 2.1 ~ 2.5 > 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pedestrian bridges on jogging tracks, etc.</li> </ul>
“jumping”	normal to high rhythmical jumping on the spot with simultaneous ground contact of both feet	1.8 to 3.4	<ul style="list-style-type: none"> <li>• fitness training with jumping, skipping and running to rhythmical music</li> <li>• jazz dance training</li> </ul>	~ 1.5 to 3.4 ~ 1.8 to 3.5	<ul style="list-style-type: none"> <li>• gymnasias, sport halls</li> <li>• gymnastic training rooms</li> </ul>
“dancing”	approximately equivalent to “brisk walking”	1.5 to 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• social events with classical and modern dancing (e.g. English Waltz, Rumba etc.)</li> </ul>	~ 1.5 to 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• dance halls</li> <li>• concert halls and other community halls without fixed seating</li> </ul>
“hand clapping with body bouncing while standing”	rhythmical hand clapping in front of one’s chest or above the head while bouncing vertically by forward and backward knee movement of about 50 mm	1.5 to 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• pop concerts with enthusiastic audience</li> </ul>	~ 1.5 to 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• concert halls and spectator galleries with and without fixed seating and “hard” pop concerts</li> </ul>
“hand clapping”	rhythmical hand clapping in front of one’s chest	1.5 to 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• classical concerts, “soft” pop concerts</li> </ul>	~ 1.5 to 3.0	<ul style="list-style-type: none"> <li>• concert halls with fixed seating (no “hard” pop concerts)</li> </ul>
“lateral body swaying”	rhythmical lateral body swaying while being seated or standing	0.4 to 0.7	<ul style="list-style-type: none"> <li>• concerts, social events</li> </ul>		<ul style="list-style-type: none"> <li>• spectator galleries</li> </ul>

Fonte: Bachmann, 1995.

### 3.10 Variáveis de Estado

Para determinação do estado de um sistema dinâmico é necessário a determinação do menor conjunto de variáveis que, a partir destas, tendo-se o conhecimento de seus valores no instante inicial,  $t = t_0$ , bem como conhecimento dos valores de entrada posteriormente ao instante inicial,  $t \geq t_0$ , permite a determinação completa do sistema para qualquer instante posterior.

Tais variáveis são definidas como *variáveis de estado do sistema dinâmico*.

Se pelo menos  $n$  variáveis  $x_1, x_2, \dots, x_n$  são necessárias para descrever todo o comportamento de um sistema dinâmico, de tal modo que sendo dada a entrada para  $t \geq t_0$  e especificado o estado inicial em  $t = t_0$ , o estado futuro do sistema fique completamente estabelecido, então essas  $n$  variáveis formam um conjunto de variáveis de estado. (Ogata, 2014).

No caso de ser necessário n variáveis de estado para determinar o comportamento de um sistema dinâmico, é usual representá-las como componentes de um vetor denominado *vetor de estado*. Tal vetor determina o estado do sistema para qualquer instante,  $t \geq t_0$ , se conhecido o estado das variáveis no instante inicial,  $t = t_0$ , bem como a entrada  $u(t)$  no domínio do tempo.

Neste sentido, a equação 3.49 pode ser reescrita utilizando-se um vetor de estado  $2n \times 1$ , dado pela equação 3.83:

$$\vec{X} = \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \dot{\vec{x}} \end{Bmatrix}, \quad (3.83)$$

e a sua derivada no tempo é

$$\dot{\vec{X}} = \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}} \end{Bmatrix}. \quad (3.84)$$

Apresentando a matriz identidade,  $[I]$ , de ordem n multiplicada pelo vetor da derivada de x no tempo,  $\dot{\vec{x}}$ , subtraída desta mesma operação, tem-se:

$$[I]\dot{\vec{x}} - [I]\dot{\vec{x}} = \vec{0}. \quad (3.85)$$

Assim, as equações 3.49 e 3.85 podem ser combinadas na forma matricial, sendo  $[0]$  e  $\vec{0}$  a matriz de zeros e vetor de zeros, respectivamente, como mostra a equação (3.86):

$$\begin{bmatrix} [I] & [0] \\ [0] & [M] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\vec{x}} \\ \ddot{\vec{x}} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} [0] & -[I] \\ [K] & [C] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \dot{\vec{x}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{F} \end{Bmatrix}, \quad (3.86)$$

É possível simplificar a equação 3.86 utilizando-se as equações 3.83 e 3.84 denominando a primeira e segunda matriz da equação 3.86 como  $[\bar{M}]$  e  $[\bar{K}]$ , respectivamente, e o vetor do segundo membro da igualdade por  $\vec{F}$ .

A equação 3.86 se torna:

$$[\bar{M}]\dot{\vec{X}} + [\bar{D}]\vec{X} = \vec{F}. \quad (3.87)$$

A equação 3.87 é então um sistema de  $2 \times n$  equações diferenciais de 1ª ordem, que pode ser solucionada utilizando-se integração numérica pelo método denominado de Runge-Kutta de quarta ordem. Para isso, a expressão 3.87, é reescrita na seguinte forma, definindo-se  $[A]$  como a matriz inversa de  $[\bar{M}]$ :

$$\dot{\vec{X}} = [A](\vec{F} - [\bar{D}]\vec{X}). \quad (3.88)$$

### 3.11 Método de Runge-Kutta

Carl David Runge (1856-1927), matemático e físico alemão, trabalhou muitos anos em espectroscopia. A análise de dados o levou a considerar problemas em computação numérica, e o método de Runge-Kutta teve origem em seu artigo sobre soluções numéricas de equações diferenciais de 1895. O método foi estendido para sistemas de equações em 1901 por Martin Wilhelm Kutta (1867-1944). Kutta era um matemático alemão que trabalhava com aerodinâmica e é, também, muito conhecido por suas contribuições importantes à teoria clássica de aerofólio (Boyce e DiPrima, 2012).

Segundo Valle, (2012, p. 26) o método de Runge-Kutta é provavelmente um dos métodos mais populares e o de quarta ordem é um dos mais utilizados para obter soluções aproximadas de valor inicial. Cada método de Runge-Kutta consiste em comparar um polinômio de Taylor apropriado para eliminar o cálculo das derivadas, fazendo-se várias avaliações da função a cada passo. O método de Runge-Kutta pode ser entendido como um aperfeiçoamento do método de Euler, com uma melhor estimativa da derivada da função.

Assim como exposto no item anterior, sobre a definição de variáveis de estado, para utilização deste método devem ser conhecidos os valores iniciais das variáveis, e que as soluções serão obtidas para um intervalo de tempo  $T$ . O método de Runge-Kutta, busca encontrar a solução de conforme abaixo:

$$x_{i+1} = x_i + \Delta x_i, \quad (3.89)$$

sendo  $x_{i+1}$  o valor de  $x$  no tempo  $t = t_{i+1}$ ,  $x_i$  o valor de  $x$  no valor de tempo  $t = t_i$ , e  $\Delta x_i$  o incremento a ser somado a  $x$ . O intervalo de tempo  $T$ , para o qual busca-se a solução, deve ser dividido em  $n$  partes iguais denominadas  $\Delta t$ , ou seja,  $\Delta t = T/n$ . Assim as soluções serão dadas de  $t_0 = 0$ ,  $t_1 = \Delta t$ ,  $t_2 = 2\Delta t$  até  $t_n = n\Delta t = T$ .

Neste método, a fórmula a aproximada para determinar-se  $x_{i+1}$  a partir de  $x_i$ , deve coincidir com a expansão em série de Taylor de  $x$  em  $x_{i+1}$  até os termos de ordem  $(\Delta t)^n$ , sendo  $n$  a ordem do método de Runge-Kutta.

A expansão da série de Taylor de  $x(t)$  para  $t + \Delta t$  é dada por:

$$x(t + \Delta t) = x(t) + \dot{x}\Delta t + \ddot{x}\frac{(\Delta t)^2}{2!} + \ddot{\ddot{x}}\frac{(\Delta t)^3}{3!} + \dots \quad (3.90)$$

Diferentemente do apresentado pela expansão da série de Taylor apresentada na equação 3.90, o método de Runge-Kutta exige apenas derivadas de primeira ordem.

Por fim, no método de Runge-Kutta de quarta ordem, a fórmula utilizada para encontrar os valores de  $\vec{X}(t) = \begin{Bmatrix} \vec{x} \\ \vec{x} \end{Bmatrix}$  é dado por:

$$\vec{X}_{i+1} = \vec{X}_i + \frac{1}{6}[\vec{K}_1 + 2\vec{K}_2 + 2\vec{K}_3 + \vec{K}_4], \quad (3.91)$$

sendo  $\vec{K}_1$ ,  $\vec{K}_2$ ,  $\vec{K}_3$  e  $\vec{K}_4$  dados por:

$$\vec{K}_1 = h\vec{f}(\vec{X}_i, t_i), \quad (3.92)$$

$$\vec{K}_2 = h\vec{f}(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_1, t_i + \frac{1}{2}\Delta t), \quad (3.93)$$

$$\vec{K}_3 = h\vec{f}(\vec{X}_i + \frac{1}{2}\vec{K}_2, t_i + \frac{1}{2}\Delta t), \quad (3.94)$$

$$\vec{K}_4 = h\vec{f}(\vec{X}_i + \vec{K}_3, t_{i+1}), \quad (3.95)$$

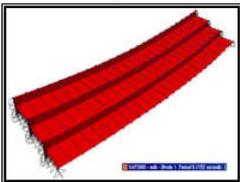
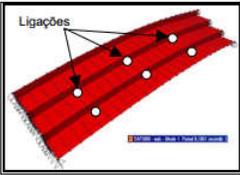
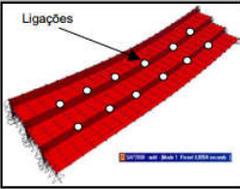
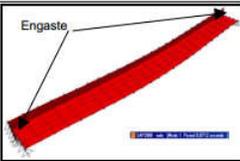
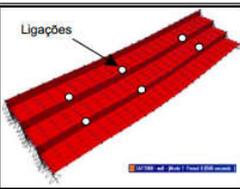
$$\vec{f}(\vec{X}, t) = \dot{\vec{X}}(t). \quad (3.96)$$

## 4. DESENVOLVIMENTO

Com o objetivo de analisar qualitativamente a influência da atividade dinâmica causada por ocupantes de arquibancada em estádio durante eventos, buscou-se referências de estudos já realizados sobre o tema. Como referência, adotou-se o trabalho desenvolvido por Juliani *et al.* (2005), o qual objetivou estudar o comportamento dinâmico de diferentes modelos de degraus para composição de uma arquibancada de um estádio.

Juliani *et al.* (2005) propõe e avalia cinco modelos de degraus, como exemplificados no Quadro 4:

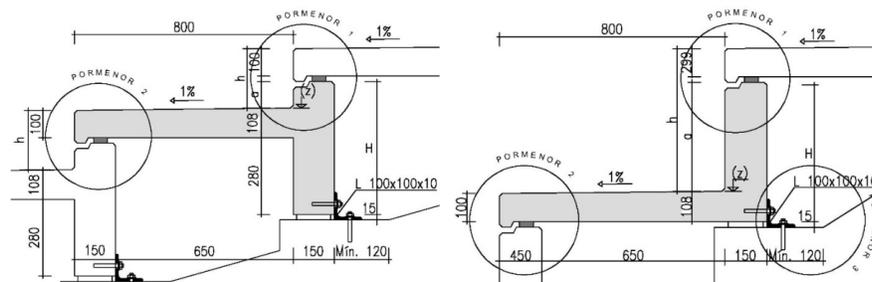
QUADRO 4 – MODELOS NUMÉRICOS DE DEGRAUS

Modelo e descrição	Figura
<p><b>MODELO MDB:</b> considera que as três peças pré-moldadas trabalham isoladamente, sendo simplesmente apoiadas nas extremidades. Esse seria o modelo mais próximo da proposta original de peças pré-moldadas sem nenhuma ligação.</p>	
<p><b>MODELO MDC:</b> considera que as três peças pré-moldadas tem três pontos de ligação entre elas.</p>	
<p><b>MODELO MDD:</b> considera que as três peças pré-moldadas tem seis pontos de ligação.</p>	
<p><b>MODELO MDE:</b> considera que as três peças pré-moldadas trabalham isoladamente mas com condição de engaste nas extremidades.</p>	
<p><b>MODELO MDF:</b> considera que as três peças pré-moldadas são ligados em três pontos e com condição de engaste nas extremidades.</p>	

A partir das propostas exibidas no Quadro 4, adotou-se para o presente trabalho como modelo, uma viga engastada nas extremidades, representando uma peça de assento trabalhando individualmente.

Os degraus das arquibancadas em geral possuem seções transversais tipo do L e T, como exemplificado na Figura 20:

FIGURA 20: TIPOS DE DEGRAUS DAS BANCADAS DO ESTÁDIO DO DRAGÃO - PORTO - PORTUGAL



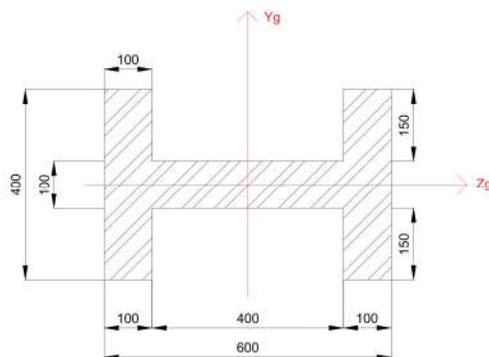
Fonte: Figueiras et al., 2004.

Estas seções não são simétricas, o que faz com que seus eixos principais de inércia estejam rotacionados em relação aos eixos vertical e horizontal, bem como seu centro de gravidade esteja deslocado dos eixos centrais da seção.

Consequentemente, em situações reais de uso, as forças que causam a flexão da viga numa arquibancada de estádio são aplicadas fora do centro de gravidade da seção e a viga acaba apresentando um efeito de torção, além da flexão propriamente dita.

Visando eliminar o efeito de torção na simulação realizada, e simplificar a análise, adota-se no presente trabalho uma viga com seção transversal do tipo H. Todavia, os valores de área e inércia calculados para a seção adotada são próximos àqueles que podem ser encontrados em situações reais. A Figura 21 apresenta as dimensões da seção adotada em milímetros:

FIGURA 21: SEÇÃO DA VIGA DO MODELO DE ESTUDO

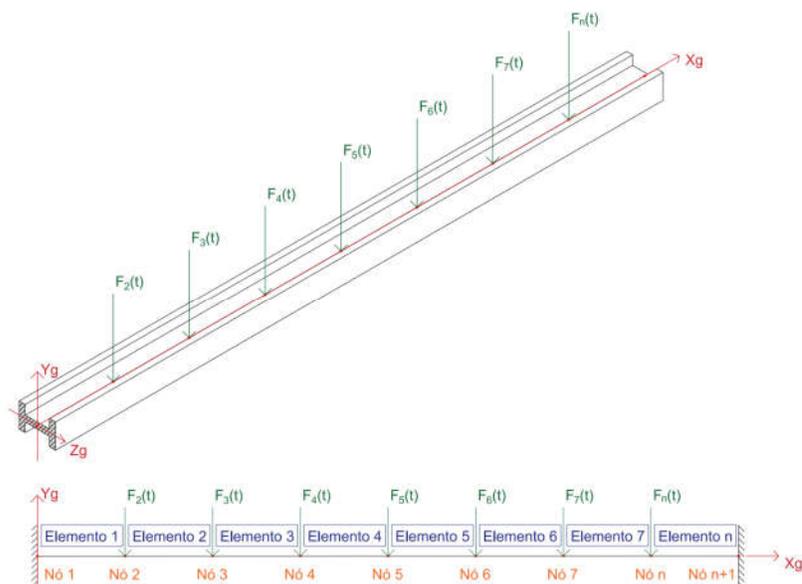


Fonte: Elaborado pelo autor.

A viga é discretizada em 8 elementos finitos, resultando em 9 pontos nodais. O número de elementos a ser utilizado para a análise foi estabelecido levando em consideração a boa precisão obtida na determinação das frequências naturais para este número de elementos. Aumentar a quantidade de elementos elevaria consideravelmente o tempo da rotina de cálculo sem ganho significativo na precisão dos resultados.

A força exercida por um espectador durante o salto é representada como uma carga pontual,  $F(t)$ , aplicada em cada ponto nodal, atuando no sentido transversal e vertical ao eixo longitudinal da viga, como representado na Figura 22:

FIGURA 22: REPRESENTAÇÃO DO MODELO ADOTADO



Fonte: Elaborado pelo autor.

No Quadro 5 apresentam-se as propriedades relacionadas à geometria adotada para a viga do modelo, bem como as propriedades mecânicas para o material considerado:

QUADRO 5: PROPRIEDADES DA VIGA MODELO

Descrição	Valor	Variável
Área da seção (m <sup>2</sup> )	0,12	$A_s$
Momento de inércia da seção transversal (m <sup>4</sup> )	$1,10 \times 10^{-3}$	$I$
Comprimento total da viga (m)	10,00	$L$
Número de elementos finitos	8	$n$
Comprimento do elemento (m)	1,25	$L_e$
Massa específica do material (kg/m <sup>3</sup> )	2.500,00	$\rho$
Modulo de elasticidade (N/m <sup>2</sup> )	$20,00 \times 10^9$	$E$

Fonte: Elaborado pelo autor.

Para a definição do carregamento nos nós, considerado como cargas pontuais, adotou-se a equação 3.82.

Uma vez definido o modelo de viga e de força, utilizou-se o ambiente do software SCILAB para desenvolvimento de uma rotina para solução numérica da equação do movimento (equação diferencial de 2<sup>a</sup> ordem). A rotina segue os seguintes passos:

- a) Entrada dos parâmetros do modelo tais como:
  - ✓ Comprimento da viga, área e momento de inercia da seção;
  - ✓ Módulo de elasticidade e densidade do material da viga;
  - ✓ Número de elementos finitos;
  - ✓ Carregamento nos pontos nodais;
  - ✓ Nós que são restritos (apoios);
- b) Montagem da matriz massa dos elementos a partir da equação 3.69;
- c) Montagem da matriz de rigidez dos elementos a partir da equação 3.70;
- d) Montagem da matriz global de massa e rigidez dos elementos, como exemplificado na seção 3.5;
- e) Montagem dos vetores das frequências naturais da viga pelo método analítico e método numérico, como exemplificado na seção 3.6;

- f) Montagem da matriz de amortecimento global a partir da equação (3.79). Neste ponto para definição dos coeficientes  $\alpha$  e  $\beta$ , foram utilizadas as equações (3.80) e (3.81), sendo  $\omega_i$  determinado como o valor médio das  $2n-1$  primeiras frequências naturais da viga, sendo ( $n$  o número de elementos) e  $\omega_j$  como a média das  $2n-1$  frequências naturais subsequentes. Para as razões de amortecimento,  $\xi_i$  e  $\xi_j$ , foram adotados  $\xi_i = 0,01$  e  $\xi_j = 0,05$ ;
- g) Montagem do vetor de forças dado pela equação (3.82);
- h) Montagem da equação de 2ª ordem do movimento para o sistema;
- i) Reescrita da equação do movimento em um sistema de equações de 1ª ordem através da utilização do conceito de Variáveis de Estado apresentados na seção (3.9);
- j) Resolução do sistema de equações de 1ª ordem, através do processo de Runge-Kutta de 4ª ordem, apresentado na seção 3.10.

Com objetivo de se fazer uma análise qualitativa, são estabelecidos os seguintes estudos de caso para permitir uma comparação:

- a) *Estudo de caso № 1: Análise das frequências naturais do sistema.* Neste estudo o objetivo é estabelecer uma comparação das frequências naturais obtidas analiticamente com aquelas obtidas através da solução numérica.
- b) *Estudo de caso № 2: Análise dos deslocamentos na condição estática.* Neste estudo de caso, considera-se a carga distribuída equivalente ao peso de 30 pessoas sob a viga de 10 metros de vão, sendo dado pela expressão:

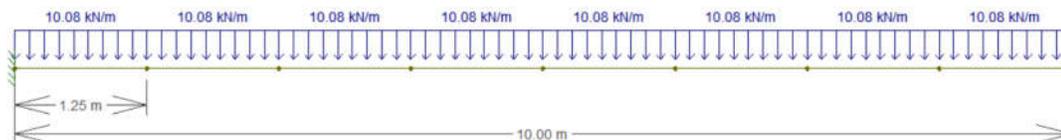
$$q_{pp} = \frac{30 \times 0,700 \text{ [kN]}}{10 \text{ [m]}} = 2,10 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right].$$

Também é considerada uma carga distribuída de  $q_{pviga} = 2,94 \text{ [kN/m]}$  devido ao peso próprio da viga, para obtenção da carga total distribuída:

$$q_{total} = q_{pp} + q_{pviga} = 2,10 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right] + 2,94 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right] = 5,04 \left[ \frac{\text{kN}}{\text{m}} \right].$$

Aplica-se à carga distribuída total,  $q_{total}$ , um fator de majoração igual à 2. Este valor de fator de majoração é usualmente utilizado para estudos dinâmicos avaliados como um carregamento estático equivalente. Esta análise é feita utilizando o ambiente do programa Ftool Versão 4.00.04 (programa para a análise estrutural de pórticos planos e vigas), conforme carregamento indicado na Figura 23:

FIGURA 23: CARREGAMENTO ESTÁTICO



Fonte: Elaborado pelo autor.

c) *Estudo de caso Nº 3: Análise dinâmica.*

Nesta condição aplica-se a carga dinâmica estabelecida na equação 3.89 aos nós entre apoios, onde a carga estática é igual 700 N, frequência da atividade igual a 2 Hz, utilizando os parâmetros de um salto normal que são apresentados na Quadro 1 para 3 harmônicos.

d) *Estudo de caso Nº 4: Análise dinâmica.*

Aplica-se a mesma carga dinâmica do caso anterior, variando a frequência da atividade de 1 Hz até 11 Hz, analisando os valores de deslocamentos máximos de cada um dos nós, para cada uma das frequências escolhidas.

e) *Estudo de caso Nº 5: Influência do comprimento da Viga nas frequências naturais.*

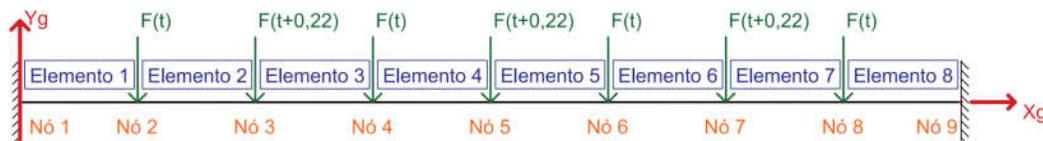
Neste caso, fez uma variação do comprimento da viga e foram calculadas as 3 primeiras frequências naturais da viga, para cada comprimento escolhido.

f) *Estudo de caso Nº 6: Análise dinâmica quando os espectadores não saltam de forma sincronizada.*

Diferentemente dos casos anteriores, nesta simulação as forças aplicadas aos nós não são sincronizadas. As cargas possuem mesmo módulo e frequência, porém as que estão aplicadas aos nós 3, 5 e 7 possuem um atraso de 0,22 segundos aproximadamente em relação as cargas aplicadas aos nós 2, 4, 6 e 8, de forma a representar um assincronismo entre os saltos dos espectadores.

A Figura 24 exemplifica este estudo de caso:

FIGURA 24: MODELO DE CARREGAMENTO DO ESTUDO DE CASO Nº 6



Fonte: Elaborado pelo autor.

## 5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

### 5.1 Caso Nº 1

Como resultado do estudo de caso Nº 1, as frequências naturais dos 3 primeiros modos da viga, que são obtidas através de solução analítica e de solução numérica, são apresentadas a seguir:

QUADRO 6: FREQUÊNCIAS NATURAIS DA VIGA MODELO

Frequência Natural	Solução Analítica (Hz)	Solução Numérica (Hz)	Erro (%)
$\omega_1$	9,643	9,644	0,0104
$\omega_2$	26,585	26,597	0,0451
$\omega_3$	52,109	52,232	0,2360

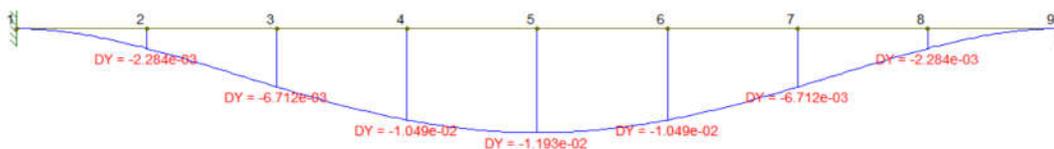
Fonte: Elaborado pelo autor.

Como pode-se observar no Quadro 6, as frequências naturais do modelo numérico se aproximaram da solução analítica, com erros inferiores 0,25%, indicando uma proximidade do modelo adotado à solução exata.

### 5.2 Caso Nº 2

Como resultado do estudo de caso Nº 2, os deslocamentos nos nós, devido à carga estática, apresentam os seguintes valores em metros conforme vê-se na Figura 25:

FIGURA 25: DESLOCAMENTOS DEVIDOS À CARGA ESTÁTICA



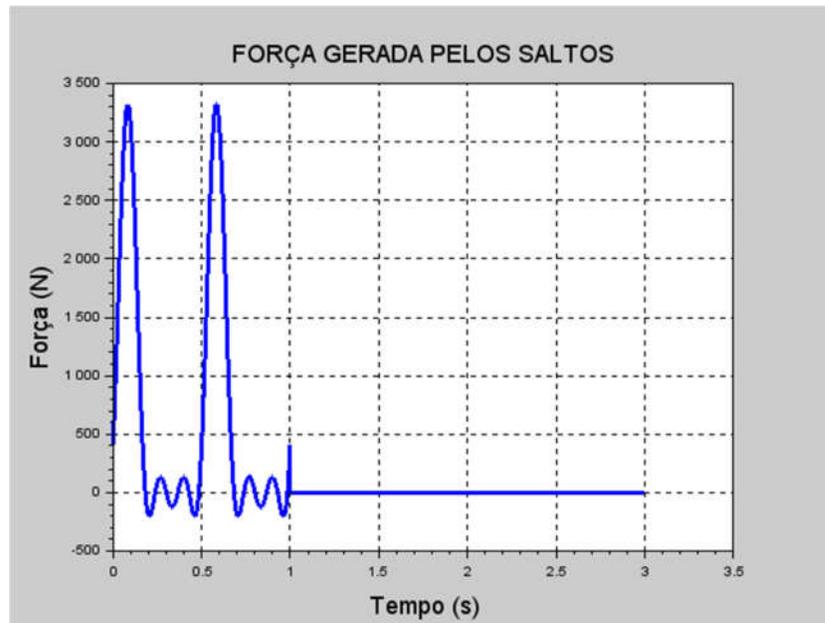
Fonte: Elaborado pelo autor.

Em função da simetria do modelo, os deslocamentos são também simétricos ao eixo de simetria da viga que passa pelo nó 5. O deslocamento máximo obtido devido a carga estática aplicada e ao peso próprio da viga é de 11,93 mm e está localizada no centro da viga.

### 5.3 Caso Nº 3

Para o estudo de caso Nº 3, o gráfico da força aplicada aos nós entre apoios é apresentado na Figura 26:

FIGURA 26: FORÇA GERADA PELO SALTO DE UMA PESSOA

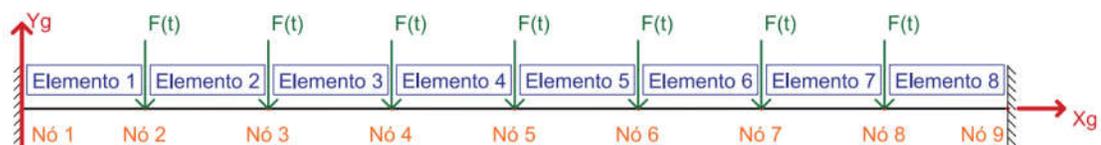


Fonte: Elaborado pelo autor.

Nota-se que o carregamento dinâmico devido ao salto de uma pessoa, de aproximadamente 70 kg de massa, com duração de 1 segundo, resulta em uma carga máxima cerca de 4,8 vezes superior ao valor da carga estática.

A Figura 27 a seguir, apresenta o modelo do estudo de caso Nº 3 em questão, onde  $F(t)$  é a representação força gerada pelo salto de uma pessoa (Figura 26):

FIGURA 27: MODELO ESTUDO DE CASO Nº3

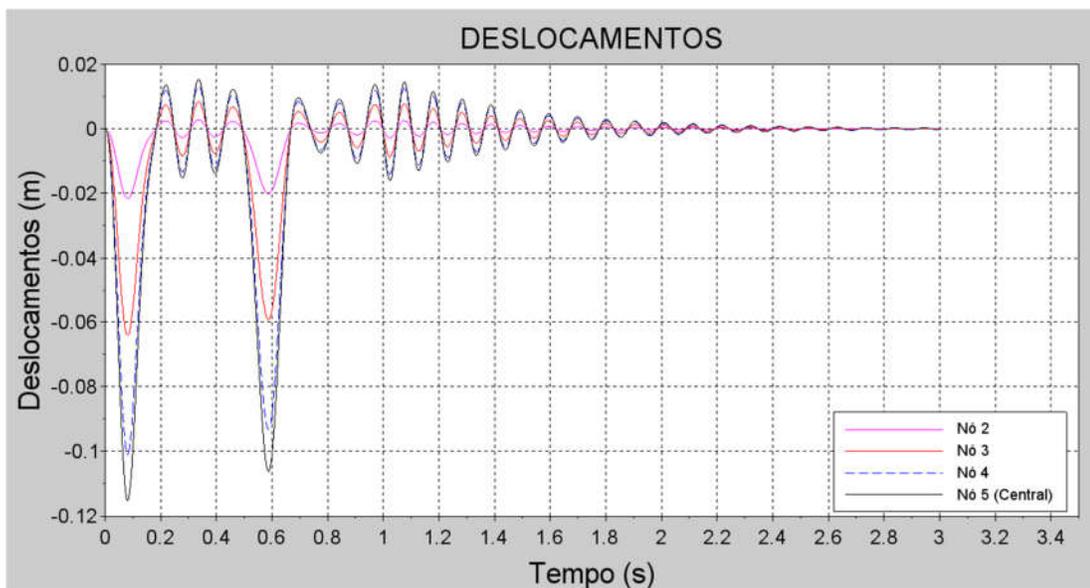


Fonte: Elaborado pelo autor.

Como o modelo apresenta simetria em relação ao nó 5 (Figura 27), os deslocamentos do nó 2 são iguais ao do nó 8, os do nó 3 são iguais ao do nó 7, e por

fim, os do nó 4 têm mesmo valor aos do nó 6. Os deslocamentos alguns destes nós são apresentados na Figura 28, a seguir:

FIGURA 28: DESLOCAMENTOS DOS NÓS DA VIGA MODELO COM O CARREGAMENTO DINÂMICO



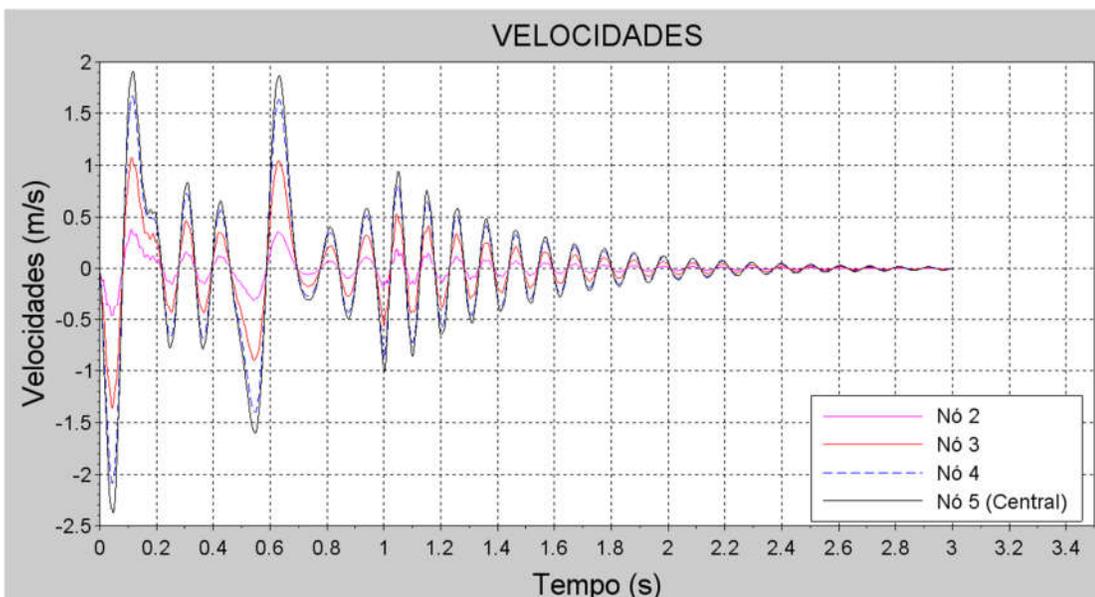
Fonte: Elaborado pelo autor.

Analisando o gráfico da Figura 28, observa-se que os maiores deslocamentos ao longo do tempo encontram-se no centro da viga, assim como para o deslocamento causado pela carga estática.

No entanto, nota-se que o deslocamento máximo obtido durante a análise dinâmica é de aproximadamente 0,115 m, ao passo que na condição estática o máximo deslocamento para o mesmo ponto é de 0,01193 m, ou seja, fazendo-se uma comparação dos casos, observa-se que o deslocamento no caso dinâmico é aproximadamente 9,6 vezes superior que no caso estático. Assim, uma carga dinâmica como a proposta que atue por um período prologado pode induzir altas tensões que causará danos à estrutura.

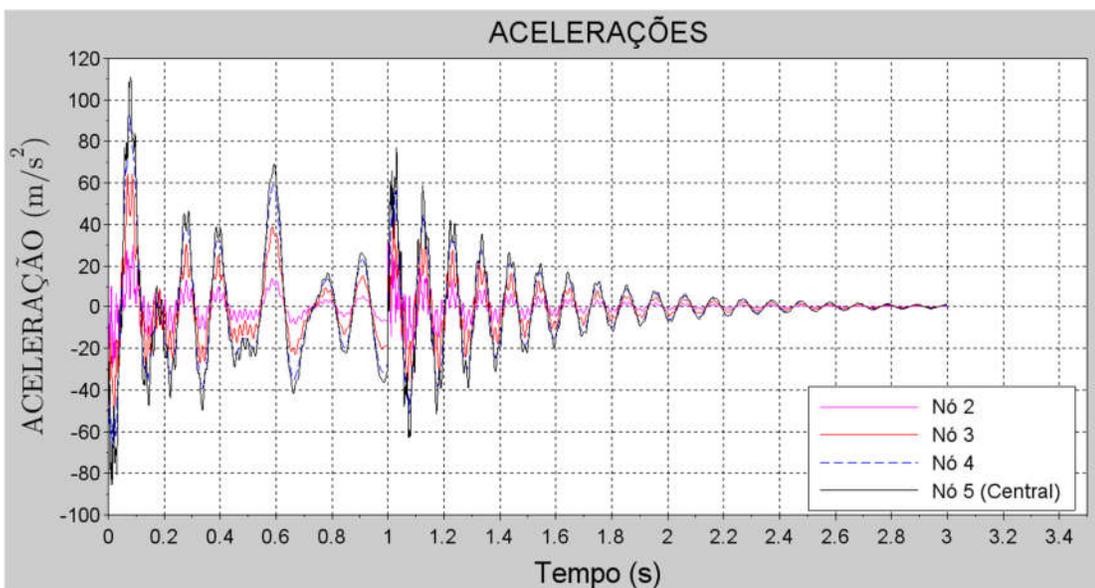
Os gráficos das velocidades e acelerações dos nós são apresentados nas Figuras 29 e 30, respectivamente:

FIGURA 29: VELOCIDADE DOS NÓS DA VIGA MODELO COM O CARREGAMENTO DINÂMICO



Fonte: Elaborado pelo autor.

FIGURA 30: ACELERAÇÕES DOS NÓS DA VIGA MODELO COM O CARREGAMENTO DINÂMICO



Fonte: Elaborado pelo autor.

A partir da análise dos gráficos da velocidade e acelerações acima apresentados, observa-se que a estrutura possui um amortecimento subcrítico e tende a amortecer a vibração num tempo maior que o tempo de atuação da carga ( $t > 1s$ ).

No entanto, os picos dos valores de aceleração máximos variam de 60 a 100  $m/s^2$ , o que causaria um extremo desconforto aos espectadores. A efeito de comparação, Bachmann *et al* (1995) apresentam limiares para percepção humana a aceleração os seguintes valores:

QUADRO 7: LIMIARES DA PERCEÇÃO HUMANA PARA VIBRAÇÕES HARMÔNICAS VERTICAIS

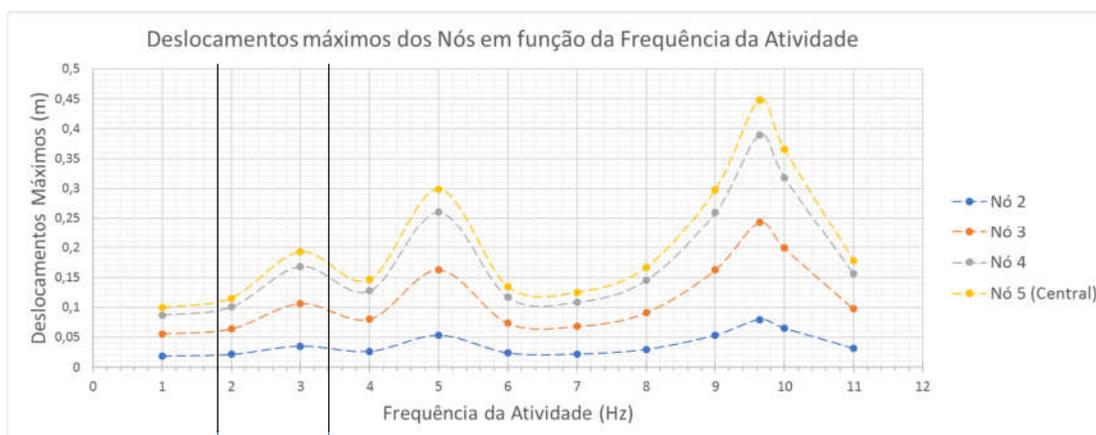
Descrição	Frequências 1 a 10 Hz Picos de aceleração ( $mm/s^2$ )	Frequências 10 a 100 Hz Picos de velocidade ( $mm/s$ )
Apenas Perceptível	34	0,5
Claramente Perceptível	100	1,3
Perturbador / Desagradável	550	6,8
Intolerável	1800	13,8

Fonte: Bachmann, 1995.

#### 5.4 Caso Nº 4

Na Figura 31 apresenta-se o gráfico dos máximos deslocamentos dos nós em função da frequência da atividade de saltar:

FIGURA 31: DESLOCAMENTOS MÁXIMOS DOS NÓS EM FUNÇÃO DA FREQUÊNCIA DA ATIVIDADE



Faixa de frequência de um salto

Fonte: Elaborado pelo autor.

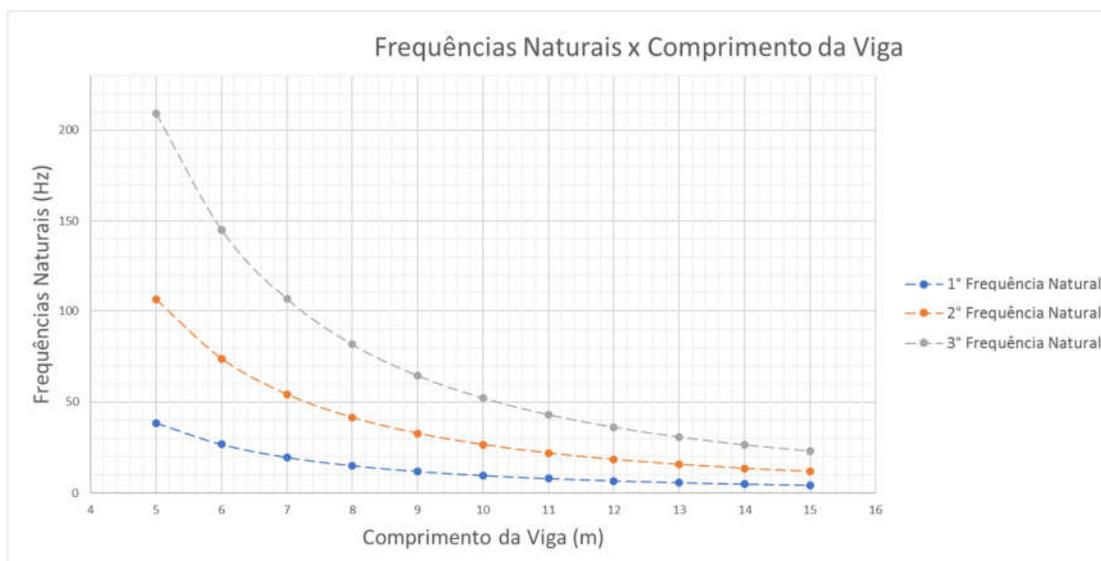
O gráfico da Figura 31 apresenta os deslocamentos máximos dos nós como pontos discretizados para cada frequência analisada. No entanto, para facilitar a análise e visualização do comportamento dos deslocamentos máximos em função da frequência da atividade, os pontos discretizados são ligados através de linhas tracejadas.

No intervalo analisado, compreendido entre 1 Hz e 11 Hz, os maiores deslocamentos são obtidos quando a frequência se aproxima da primeira frequência natural, onde ocorre o efeito de ressonância. Porém, para este caso, apesar da viga possuir a primeira frequência natural no valor de 9,644 Hz, observa-se que também há um aumento nos deslocamentos máximos quando próximos a faixa de frequência esperadas para o salto de uma pessoa (de 1,8 Hz a 3,4 Hz).

## 5.5 Caso Nº 5

Na Figura 32 apresenta-se a evolução das 3 primeiras frequências naturais da viga com o aumento do comprimento da mesma. Os valores de frequência natural são pontos discretos calculados para cada comprimento da viga analisado. Porém, estes pontos são interligados para melhor visualização.

FIGURA 32: EVOLUÇÃO DA FREQUÊNCIA NATURAL COM A VARIAÇÃO DO COMPRIMENTO DA VIGA



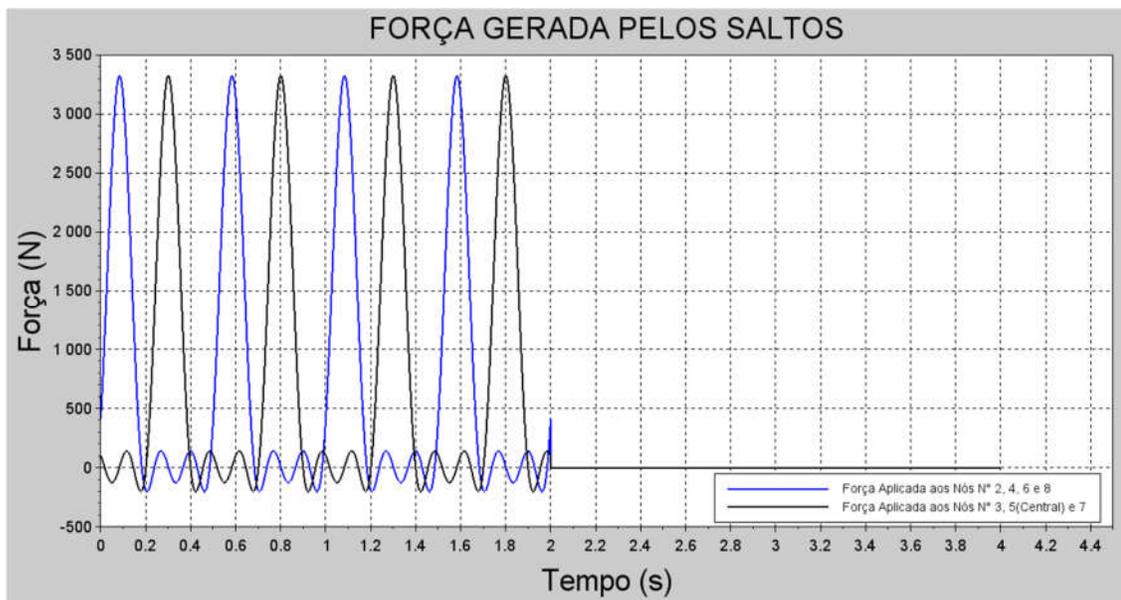
Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se que as frequências naturais são inversamente proporcionais ao comprimento da viga, ou seja, com o aumento do comprimento da viga, as frequências naturais reduzem-se. Como a estrutura manteve as propriedades mecânicas do material e as propriedades geométricas da seção (mesmo momento de inércia, densidade e módulo de elasticidade), com o aumento do comprimento da viga, aumenta-se a massa e as frequências naturais reduzem-se.

## 5.6 Caso Nº 6

As Figuras 33 a 36 apresentam os resultados para o estudo de caso Nº 6:

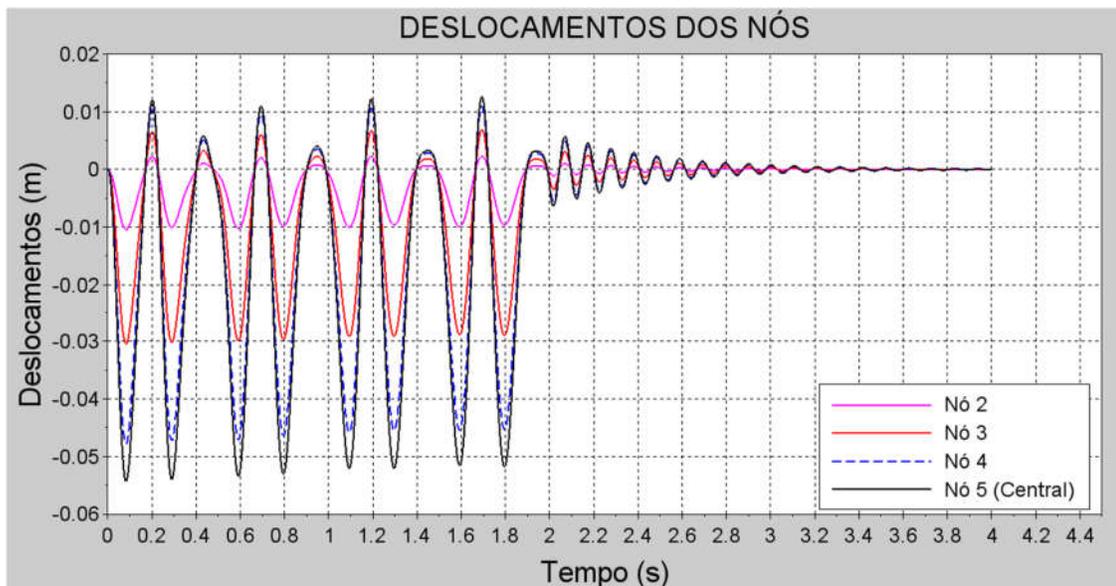
FIGURA 33: FORÇA GERADA PELOS SALTOS ASSÍNCRONOS (ESTUDO DE CASO Nº 6)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Observa-se na Figura 33 que as forças aplicadas aos nós no estudo de caso Nº 6 possuem a mesma forma, frequência e intensidade, estando defasadas no tempo.

FIGURA 34: DESLOCAMENTOS DOS NÓS DA VIGA COM SALTOS ASSÍNCRONOS (ESTUDO DE CASO Nº 6)

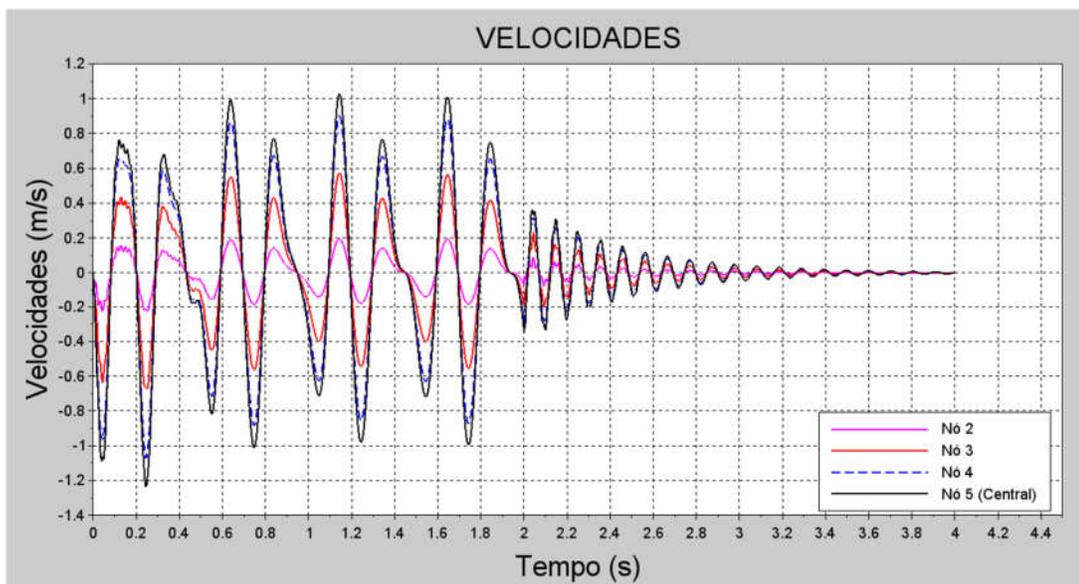


Fonte: Elaborado pelo autor.

Os deslocamentos máximos dos nós apresentados na Figura 34 são cerca de duas vezes menores do que aqueles apresentados na Figura 28, quando todas as forças aplicadas aos nós estavam sincronizadas. Isso demonstra que o sincronismo do movimento influencia diretamente nos deslocamentos máximos da viga. Quando o movimento dos espectadores é sincronizado, obtém-se maiores deslocamentos dos nós da viga.

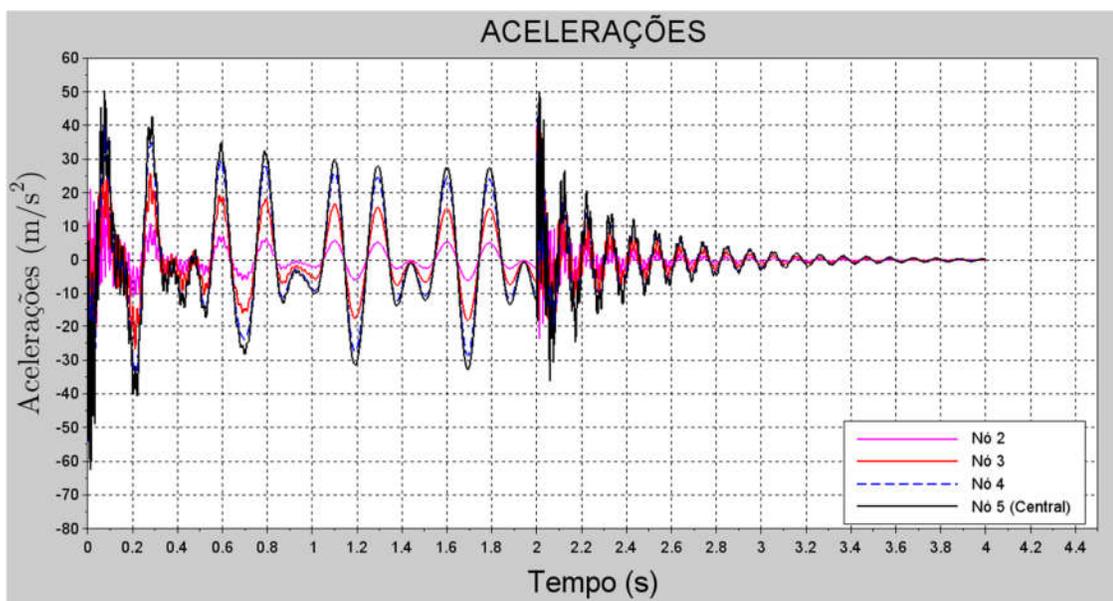
A seguir apresentam-se as velocidades e acelerações dos nós para o estudo de caso Nº 6:

FIGURA 35: VELOCIDADE DOS NÓS (ESTUDO DE CASO Nº 6)



Fonte: Elaborado pelo autor.

FIGURA 36: ACELERAÇÕES DOS NÓS (ESTUDO DE CASO Nº 6)



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim como observado para os deslocamentos, as Figuras 35 e 36 também indicam que houve uma redução significativa nas amplitudes de velocidade e aceleração e se comparadas às Figuras 29 e 30, respectivamente, onde todas as forças dinâmicas estavam sincronizadas.

## 6. CONCLUSÃO

Conclui-se que as cargas dinâmicas, oscilando em frequências próximas as frequências naturais da estrutura, geram deslocamentos maiores que cargas estáticas de mesmo módulo. Porém, ainda que a estrutura seja excitada numa frequência diferente de sua frequência natural, sob condições específicas, existe a possibilidade de ocorrerem acelerações relativamente altas que, se não comprometerem a integridade da estrutura, trazem a sensação desconforto aos ocupantes.

Como constatado, uma carga dinâmica de menor magnitude pode gerar deslocamentos superiores a cargas estáticas de maior magnitude. Logo nem sempre majorar a carga estática no dimensionamento é suficiente para se garantir que a estrutura não apresente problemas relacionados à vibrações, deslocamentos excessivos e, conseqüente desconforto.

Entre as maneiras de reduzir os efeitos da vibração na estrutura, busca-se distanciar ao máximo as primeiras frequências naturais do sistema, da frequência de excitação. No caso de vigas, o aumento da rigidez pode ser obtido através da redução do seu comprimento. Porém em estádios, a redução do comprimento da viga implica na redução do campo de visão dos espectadores. Assim, há situações que se faz necessária a adoção de soluções mais complexas como, por exemplo, a inclusão de sistemas de amortecimento.

Pode-se concluir também que o sincronismo entre os saltos impacta diretamente nos deslocamentos da estrutura. Quando todos saltos estão sincronizados, as forças nodais estão atuando no mesmo sentido e seus máximos ocorrem no mesmo instante de tempo, contribuindo para o aumento dos deslocamentos.

Cabe destacar que o salto de uma pessoa corresponde a um fenômeno randômico, sendo os resultados obtidos também randômicos. Nesta circunstância uma análise estatística se faz necessária. Portanto, sugere-se como proposta de trabalho futuro, a realização de uma análise estatística para cargas de saltos obtidas de forma experimental, para novas simulações e avaliação dos resultados.

## 7. REFERÊNCIAS

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014. cap.23, p.192-193.

BACHMANN, H. et al. **Vibration problems in structures: practical guidelines**. Basel: Birkhäuser Verlag, 1995.

BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. 2ª ed. Massachusetts: Prentice Hall, 2014.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno**. Tradução de Valéria de Magalhães Iorio. 10ª edição. Rio de Janeiro: LTC, 2015.

ELLIS, B. R.; JI, T.; LITTLER, J. D. The response of grandstands to dynamic crowd loads. **Proceedings of the Institution of Civil Engineers - Structures and Buildings**. London, nov. 2000, v. 140, p. 355-365.

ERLINGSSON, S.; BODARE, A. Live load induced vibrations in Ullevi stadium – dynamic soil analysis. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**. Great Britain, 15, p.171-188, 1996.

FIGUEIRAS, H.; FÉLIX, C.; FIGUEIRAS, J. **Ensaio de Degraus Pré-Fabricados Constituindo Bancadas do Estádio do Dragão**. Porto: FEUP, 2004.

HAMILL, J.; KNUTZEN, K. M.; DERRICK, T. R. **Biomechanical Basis of Human Movement**. 4ª ed. Philadelphia: Wolters Kluwer, 2015.

JULIANI, M.A. et al. **Avaliação dinâmica das arquibancadas do Estádio Olímpico João Havelange utilizando simulação numérica e monitoração**. 1º Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto Pré-Moldado. São Carlos, 2005.

MEIROVITCH, L. **Fundamentals of Vibrations**. New York: McGraw-Hill, 2001.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. Tradução de Heloísa Coimbra de Souza. 5ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2010.

RAO, S. S. **Vibrações mecânicas**. Tradução de Arlete Simille Marques. 4ª ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

SILVA, C. **Análise de vibrações em elementos pré-fabricados de bancadas de estádios**. 2012. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) - Universidade Nova de Lisboa, 2012.

SORIANO, H.L. **Introdução à dinâmica das estruturas**. 1ª ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.

\_\_\_\_\_. **Mechanical Vibrations**. 5ª ed. New Jersey: Pearson Prentice Hall, 2011.

THOMSON, W. T. **Teoria da vibração com aplicações**. Tradução de Cassio Sigaud. 1ª ed. Rio de Janeiro: Editora Interciência, 1978.

VALLE, K. N. F. **Métodos Numéricos de Euler e Runge-Kutta**. Belo Horizonte: Universidade Federal de Minas Gerais; 2012.